

Forslag til ny eksamensordning med kommentarer

2012

MAT1013 Matematikk 1T

Forslag til ny eksamensordning fra våren 2015:

Del 1: 3 timer

Del 2: 2 timer

Nye minstekrav til digitale verktøy på datamaskin:

- CAS
- Graftegner

Bokmål

Eksamensinformasjon

Eksamenstid:	5 timer: Del 1 skal leveres inn etter 3 timer. Del 2 skal leveres inn senest etter 5 timer.
Hjelpemidler på Del 1:	Vanlige skrivesaker, passer, linjal med centimetermål og vinkelmåler.
Hjelpemidler på Del 2:	Alle hjelpemidler er tillatt, med unntak av Internett og andre verktøy som tillater kommunikasjon. Når en oppgave er merket med «CAS» eller «GRAFTEGNER», skal du bruke datamaskin med dette digitale verktøyet for å løse oppgaven. Når en oppgave ikke er merket, kan du selv velge metode og verktøy.
Framgangsmåte:	Bruk blå eller svart penn når du skriver for hånd. Del 1 skal føres på papir. Du kan ikke bruke datamaskin. Del 2 kan føres på papir. Dersom du velger å skrive besvarelsen av Del 2 for hånd, skal utskrifter fra CAS og graftegner følge med, merkes som vedlegg og refereres til i besvarelsen. Du kan også velge å bare bruke datamaskin, samle alle løsninger i ett dokument og levere hele Del 2 som utskrift. Del 2 kan gjennomføres som IKT-basert eksamen. Alle løsninger skal da samles i én fil og leveres digitalt.
Veiledning om vurderingen:	Poeng i Del 1 og Del 2 er bare veiledende i vurderingen. Karakteren blir fastsatt etter en samlet vurdering. Det betyr at sensor vurderer i hvilken grad du – viser regneferdigheter og matematisk forståelse – gjennomfører logiske resonnementer – ser sammenhenger i faget, er oppfinnsom og kan ta i bruk fagkunnskap i nye situasjoner – kan bruke hensiktsmessige hjelpemidler – vurderer om svar er rimelige – forklarer framgangsmåter og begrunner svar – skriver oversiktlig og er nøyaktig med utregninger, benevnninger, tabeller og grafiske framstillinger

DEL 1: 3 timer, 36 poeng

Hjelpemidler: Vanlige skrivesaker, passer, linjal med centimetermål og vinkelmåler

Oppgave 1 (2 poeng)

- a) Regn ut og skriv svaret på standardform

$$8,20 \cdot 10^9 \cdot 1,50 \cdot 10^{-3}$$

- b) Skriv så enkelt som mulig

$$\frac{(a^2)^4 \cdot \left(\frac{b}{a}\right)^2}{a^3 \cdot b^{-2}}$$

Oppgave 2 (3 poeng)

- a) Skriv så enkelt som mulig

$$(a+b)^2 - (a-b)^2$$

- b) Faktoriser og forkort

$$\frac{2x+6}{2x^2-18}$$

Oppgave 3 (4 poeng)

En funksjon g er gitt ved $g(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 - 3x + 4$, $D_g = \mathbb{R}$

- a) Bestem den momentane vekstfarten til g når $x = 1$

- b) Bestem ekstremalpunktene til g .

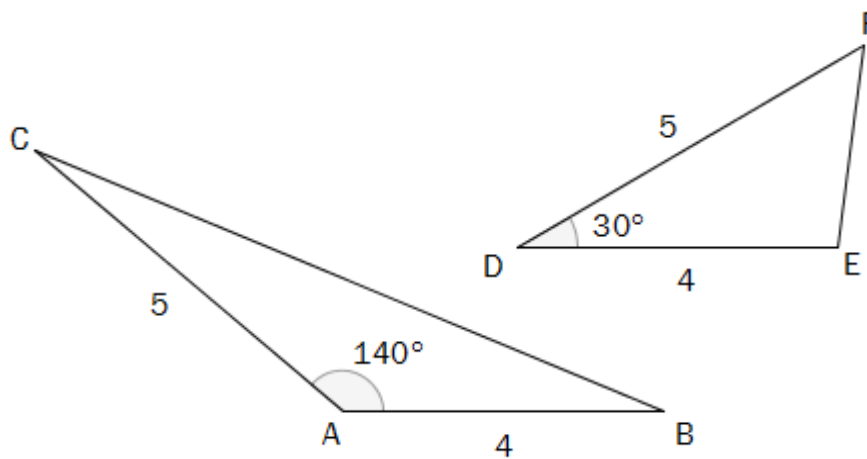
Oppgave 4 (5 poeng)

- a) Kari har tegnet en sirkel og et kvadrat. Hver av de to figurene har omkrets lik 16. Regn ut hvilken av figurene som har størst areal.
- b) Arealet av et trapes er gitt ved formelen $A = \frac{(a+b)}{2} \cdot h$. Uttrykk h ved hjelp av A , a og b .
- c) Arealet av et trapes er $18,0 \text{ cm}^2$. Høyden i trapeset er $3,0 \text{ cm}$, og den ene parallelle siden er $2,0 \text{ cm}$ lengre enn den andre. Regn ut lengden av de parallelle sidene.

Oppgave 5 (3 poeng)

- a) Tegn en rettvinklet trekant ABC der $\sin B = \frac{2}{5}$

b)



Undersøk hvilken av de to trekantene ovenfor som har størst areal.

Oppgave 6 (4 poeng)

- a) Bestem likningen for den rette linjen som går gjennom punktene $(1,2)$ og $(2,4)$.
- b) En funksjon f er gitt ved $f(x) = x^2 + 4$
Bruk definisjonen av den deriverte til å vise at $f'(x) = 2x$

Oppgave 7 (4 poeng)



Kilde: <https://nostebarn.no/wp/product/Ull-okologiske-Barneklær-Babyklær-Ulltoy/Ullsokker-barn/> (28.12.2010)

Siri har 2 brune, 2 røde, 2 blå, 2 hvite og 2 rosa sokker i en skuff.
En dag tar hun tilfeldig to sokker fra skuffen.

- a) Bestem sannsynligheten for at hun tar to rosa sokker.
- b) Bestem sannsynligheten for at hun tar én rosa sokk og én sokk som har en annen farge.

Oppgave 8 (6 poeng)

a) Løs likningen

$$-\frac{1}{4}x + 2 = 2x - \frac{5}{2}$$

b) Løs likningssettet

$$\begin{cases} x + y = 7 \\ 3x - 2y = -4 \end{cases}$$

c) Løs ulikheten

$$-2x^2 + 9x + 5 \leq 0$$

Oppgave 9 (2 poeng)

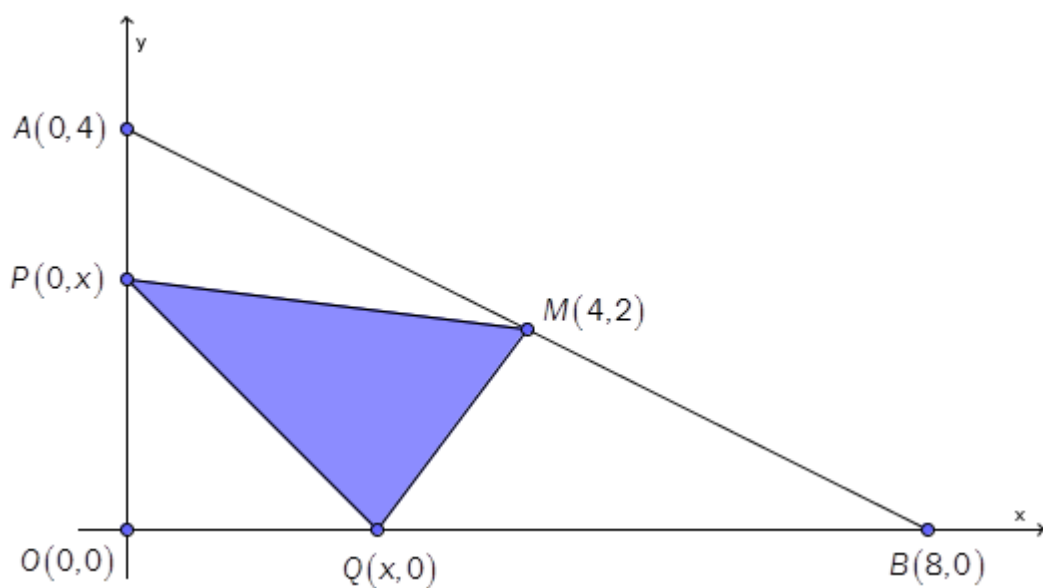
En funksjon f er gitt ved $f(x) = 4x^2 + bx + c$

Funksjonen har bare ett nullpunkt.

Grafen til funksjonen skjærer y -aksen i punktet $(0,1)$.

Bestem b og c .

Oppgave 10 (3 poeng)



$\triangle PQM$ er innskrevet i $\triangle AOB$.

- a) Vis at arealet av $\triangle PQM$ kan uttrykkes ved funksjonen T gitt ved

$$T(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 3x \quad x \in [0,4]$$

- b) Bestem x slik at arealet av $\triangle PQM$ blir størst mulig.

DEL 2: 2 timer, 24 poeng

Alle hjelpemidler er tillatt, med unntak av Internett
og andre verktøy som tillater kommunikasjon

Oppgave 1 (4 poeng)

CAS og GRAFTEGNER

- a) Løs likningssystemet ved hjelp av CAS.

$$\begin{cases} 2y - x^2 + 2x = 6 \\ y - 2x = 3 \end{cases}$$

- b) Løs ulikheten $\frac{1}{2}x^2 - x + 3 \geq 2x + 13$ grafisk.

Oppgave 2 (4 poeng)

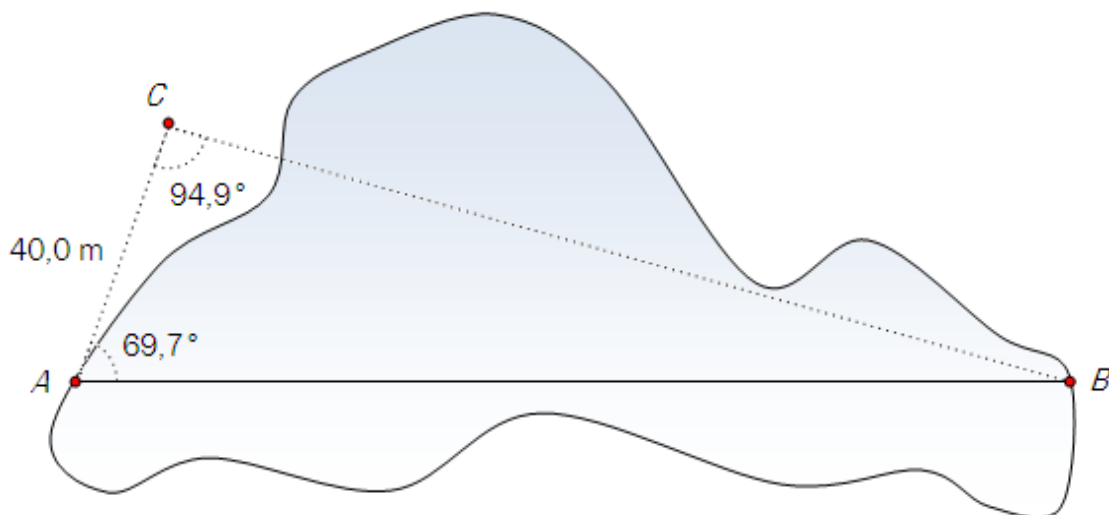
En bedrift har lansert et nytt produkt. En undersøkelse viser at åtte av ti kunder er fornøyd med produktet.

Vi velger tilfeldig 100 kunder.

- a) Bestem sannsynligheten for at akkurat 75 av disse kundene er fornøyd med produktet.
- b) Bestem sannsynligheten for at flere enn 75 av disse kundene er fornøyd med produktet.

Oppgave 3 (7 poeng)

CAS



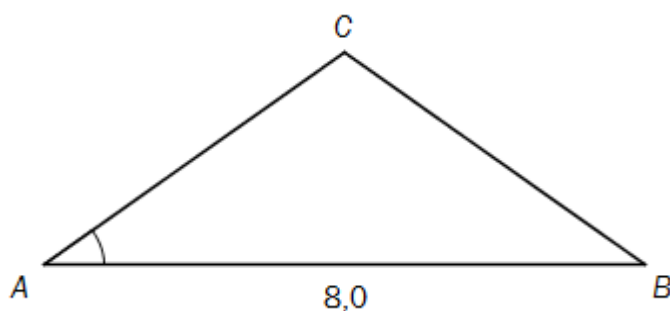
Hilde står i punkt A og vil finne ut hvor langt det er til punkt B . Hun måler avstanden AC , $\angle A$ og $\angle C$. Se figuren ovenfor.

- a) Bruk opplysningene på figuren, og bestem hvor langt det er fra A til B .

I skolegården står det tre trær. Trærne danner hjørnene i en trekant. Petter måler avstandene mellom trærne til 14,0 m, 20,0 m og 24,0 m.

- b) Bestem arealet av trekanten som trærne danner.

c)

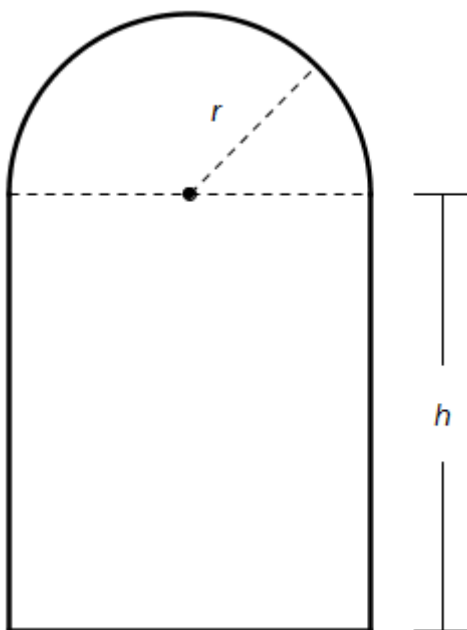


$\triangle ABC$ ovenfor er likebeint og har areal 11,2. $AB = 8,0$.

Bestem $\angle A$ og lengden av AC .

Oppgave 4 (4 poeng)

CAS eller GRAFTEGNER



Vinduet ovenfor er satt sammen av et rektangel og en halvsirkel. Vinduet har omkrets 8,0 m.

Hva må radius r i halvsirkelen være for at arealet av vinduet skal bli størst mulig?
Bestem dette arealet.

Oppgave 5 (5 poeng)

CAS eller GRAFTEGNER

Funksjonen f er gitt ved

$$f(x) = 0,5x^3 - 3,25x^2 + 6x - 2,25, \quad x \in [-1, 4]$$

Grafen til f har tre tangenter som går gjennom origo.

- Tegn grafen til f i et koordinatsystem, og skisser de tre tangentene.
- Skriv opp likningen for en tangent til grafen til f som går gjennom punktet $(x_1, f(x_1))$.
Bruk denne likningen til å finne de tre punktene der grafen til f har en tangent som går gjennom origo.

Læreplandekning for eksempeloppgave, MAT1013 Matematikk 1T

	Kompetansemål 1T ¹	Del 1	Del 2
	Hovedområde: Tal og algebra		
1	tolke, tilarbeide og vurdere det matematiske innhaldet i ulike tekstar		
2	bruke matematiske metodar og hjelpemiddel til å løyse problem frå ulike fag og samfunnsområde		
3	rekne med potensar med rasjonal eksponent og tal på standardform, bokstavuttrykk, formlar, parentesuttrykk og rasjonale og kvadratiske uttrykk med tal og bokstavar, og bruke kvadratsetningane til å faktorisere algebrauttrykk	1a, 1b 2a, 2b 4b	
4	løyse likningar, ulikskapar og likningssystem av første og andre grad og enkle likningar med eksponential- og logaritmefunksjonar, både med rekning og med digitale hjelpemiddel	8a, 8b, 8c	1a, 1b 5b
5	omforme ei praktisk problemstilling til ei likning, ein ulikskap eller eit likningssystem, løyse det og vurdere kor gyldig løysinga er	4c	
	Hovedområde: Geometri		
6	gjere greie for definisjonane av sinus, cosinus og tangens og bruke trigonometri til å berekne lengder, vinklar og areal i vilkårlige trekantar	5a, 5b	3a, 3b, 3c
7	bruke geometri i planet til å analysere og løyse samansette teoretiske og praktiske problem knytte til lengder, vinklar og areal	4a 10a	4
	Hovedområde: Sannsyn		
8	formulere, eksperimentere med og drøfte enkle uniforme og ikkje-uniforme sannsynsmodellar		
9	berekne sannsyn ved hjelp av systematiske oppstillingar, og bruke addisjonssetninga og produktsetninga		
10	bruke omgrepa uavhengnad (bm.: uavhengighet) og vilkårsbunde (bm.: betinget) sannsyn i enkle situasjonar	7a, 7b	
11	lage binomiske sannsynsmodellar ut frå praktiske døme, og berekne binomisk sannsyn ved hjelp av formlar og digitale hjelpemiddel		2a, 2b
	Hovedområde: Funksjonar		
12	gjere greie for funksjonsomgrepet og teikne grafar ved å analysere funksjonsomgrepet	9	5a
13	berekne nullpunkt, skjæringspunkt og gjennomsnittleg vekstfart, finne tilnærma verdiar for momentan vekstfart og gje nokre praktiske tolkingar av desse aspekta	9	5b
14	gjere greie for definisjonen av den deriverte, bruke definisjonen til å utleie ein derivasjonsregel for polynomfunksjonar og bruke denne regelen til å drøfte funksjonar	3 6b 10b	
15	lage og tolke funksjonar som beskriv praktiske problemstillingar, analysere empiriske funksjonar og finne uttrykk for ein tilnærma lineær funksjon	6a	4
16	bruke digitale hjelpemiddel til å drøfte polynomfunksjonar, rasjonale funksjonar, eksponentialfunksjonar og potensfunksjonar		4

¹ <http://www.udir.no/grep/Lareplan/?laereplanid=1101832> (18.02.2011)

Formelark for MAT1013 Matematikk 1T

Formler som skal være kjent ved
Del 1 av eksamen i MAT1013 Matematikk 1T
(Formelarket kan *ikke* brukes på Del 1 av eksamen.)

Standardform	$a = \pm k \cdot 10^n \quad 1 \leq k < 10 \quad \text{og } n \text{ er et helt tall}$
Vekstfaktor	$1 + \frac{p}{100}$ $1 - \frac{p}{100}$
Rette linjer	$y = ax + b$ $a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ $y - y_1 = a(x - x_1)$
Potenser	$a^p \cdot a^q = a^{p+q}$ $\frac{a^p}{a^q} = a^{p-q}$ $(a^p)^q = a^{p \cdot q}$ $\left(\frac{a}{b}\right)^p = \frac{a^p}{b^p}$ $(a \cdot b)^p = a^p \cdot b^p$ $a^0 = 1$ $a^{-p} = \frac{1}{a^p}$
Kvadratsetningene og konjugatsetningen	$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$
Likning av andre grad	$ax^2 + bx + c = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$
Logaritmer	$a^x = b \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{\lg b}{\lg a}$ $\lg x = c \quad \Leftrightarrow \quad x = 10^c$
Vekst og derivasjon	Gjennomsnittlig veksthastighet Momentan veksthastighet Definisjon av den deriverte $f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$ Derivasjonsregel for polynomfunksjoner

Trigonometri i rettvinklede trekanter	$\sin v = \frac{\text{motstående katet}}{\text{hypotenus}}$ $\cos v = \frac{\text{hosliggende katet}}{\text{hypotenus}}$ $\tan v = \frac{\text{motstående katet}}{\text{hosliggende katet}}$
Geometri	$\text{Areal} = \frac{1}{2} bc \sin A$ $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$ $\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}$
Sannsynlighet	Sannsynlighet ved systematiske oppstillinger $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$ $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B A)$ $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) \quad \text{når } A \text{ og } B \text{ er uavhengige}$

Binomisk fordeling

Hvis binomisk fordeling inngår i Del 1 av eksamen, vil formelen bli oppgitt slik:

Binomisk fordeling:
$$P(X = k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1 - p)^{n-k}$$

Antall uavhengige forsøk er n .

X er antall ganger A inntreffer.

$P(A) = p$ i hvert forsøk.

Kommentarer til eksempeloppgaven

MAT1013 Matematikk 1T etter ny modell

I disse kommentarene til eksempeloppgaven etter ny modell i MAT1013 Matematikk 1T finner du informasjon om struktur, innhold og digitale verktøy. Forslaget innebærer viktige endringer.

Sentralt gitt skriftlig eksamen i MAT1013 Matematikk 1T er todelt og varer i 5 timer.

1. Del 1 av eksamen

1.1 Struktur i Del 1 av eksamen

Del 1 varer i 3 timer.

Oppgavene i Del 1 av eksamen nummereres fortløpende som «Oppgave 1», «Oppgave 2» og så videre. Hver oppgave kan inneholde 1–3 delspørsmål.

1.2 Hjelpemidler på Del 1 av eksamen

Tillatte hjelpemidler er vanlige skrivesaker, passer, linjal med centimetermål og vinkelmåler. Det er ikke tillatt å bruke datamaskin under Del 1 av eksamen.

1.3 Innhold i Del 1 av eksamen

I Del 1 vil det legges vekt på kunnskaper og kompetanse om fagets metoder, symbol- og formalismekompetanse, algoritmer, matematiske ferdigheter, utledninger, bevis, argumentasjon, drøfting, resonnement og så videre, i henhold til kompetansemålene i læreplanen.

Oppgavene i Del 1 av eksamen vil samlet prøve alle hovedområdene i læreplanen:

- Tall og algebra
- Geometri
- Sannsynlighet
- Funksjoner

Del 1 vil inneholde oppgaver med ulik vanskegrad.

Det forutsettes at eksamenskandidatene er kjent med og kan formlene, setningene og så videre som er gitt på «Formelark for MAT1013 Matematikk 1T».

1.4 Besvarelse av Del 1 av eksamen

Del 1 er *papirbasert*. Besvarelsen skal føres med penn på skolens eksamenspapir. Det skal *ikke* brukes datamaskin under Del 1 av eksamen. Besvarelsen av Del 1 skal leveres inn nøyaktig 3 timer etter eksamensstart. Besvarelsen av Del 1 må ikke leveres ut igjen til eksamenskandidaten etter at den er levert inn. Besvarelsen av Del 1 skal føres på egne ark, slik at den kan skilles fra besvarelsen av Del 2.

2. Del 2 av eksamen

2.1 Struktur i Del 2 av eksamen

Del 2 varer i 2 timer.

Oppgavene i Del 2 av eksamen nummereres fortløpende som «Oppgave 1», «Oppgave 2» og så videre. Hver oppgave kan inneholde 1–3 delspørsmål.

2.2 Hjelpemidler på Del 2 av eksamen

Alle hjelpemidler er tillatt, med unntak av Internett og andre verktøy som tillater kommunikasjon. Eksamenskandidatene kan når som helst starte med besvarelsen av Del 2, men de får ikke tilgang til hjelpemidlene før det har gått to timer og besvarelsen av Del 1 er levert inn.

2.3 Minstekrav til digitale verktøy på Del 2 av eksamen

Oppgavene i Del 2 forutsetter at eksamenskandidatene i MAT1013 Matematikk 1T er kjent med og kan bruke datamaskin med følgende digitale verktøy (programvare):

- CAS
- Graftegner

Oppgavene i Del 2 blir utformet med tanke på at de skal løses ved hjelp av digitale verktøy. Når en oppgave er merket med «CAS» eller «GRAFTEGNER», er det obligatorisk å bruke dette digitale verktøyet for å løse oppgaven. Når en oppgave ikke er merket, kan eksamenskandidaten selv velge metode og verktøy.

Dersom eksamenskandidaten velger et annet verktøy / en annen løsningsmetode enn det oppgaven krever, vil dette kunne gi noe uttelling.

2.4 Innhold i Del 2 av eksamen

I Del 2 vil det legges vekt på matematisk forståelse og evne til å løse sammensatte matematiske problemstillinger.

Oppgavene i Del 2 av eksamen vil samlet prøve alle hovedområdene i læreplanen:

- Tall og algebra
- Geometri
- Sannsynlighet
- Funksjoner

Del 2 vil inneholde oppgaver med ulik vanskegrad.

I Del 2 prøves eksamenskandidatenes evne til å bruke digitale verktøy for å løse matematiske problemstillinger og presentere løsninger.

2.5 Besvarelse av Del 2 av eksamen

Del 2 av eksamen er enten papirbasert (utskrifter og bruk av penn) eller IKT-basert.

Papirbasert eksamen

Under Del 2 av eksamen må eksamenskandidatene ha tilgang til datamaskin der den programvaren som skal brukes, er installert. Kandidatene må også ha tilgang til skriver under hele Del 2 av eksamen.

Dersom en kandidat velger å skrive besvarelsen sin for hånd, skal utskrifter fra graftegner og CAS følge med, merkes som vedlegg og refereres til i besvarelsen.

Det er viktig med tydelige referanser til vedlegg og en oversiktlig struktur i besvarelsen.

Kandidatene kan også velge å samle alle løsninger i ett dokument og levere hele Del 2 som utskrift.

IKT-basert eksamen

Del 2 kan også besvares som IKT-basert eksamen, jf. kapittel 6. Alle løsningene skal da samles og leveres digitalt i én fil.

3. Annet

3.1 Særskilt tilrettelegging av eksamen

For særskilt tilrettelegging av eksamen, se rundskriv Udir-4-2010. Rundskrivet er publisert på Utdanningsdirektoratets nettsider, www.udir.no

3.2 Kommunikasjon

Under eksamen har kandidatene ikke anledning til å kommunisere med hverandre eller utenforstående. Det betyr at Internett, mobiltelefoner og alle andre innretninger som tillater kommunikasjon, ikke er tillatt under eksamen.

4. Digitale verktøy ved eksamen for MAT1013 Matematikk 1T

Digitale verktøy åpner for nye muligheter når vi skal arbeide med og presentere matematikk. Verktøyene kan hjelpe oss å forbinde ulike representasjoner og dermed gjøre det lettere å se sammenhenger og forstå.

I dag er digitale matematiske verktøy kraftigere og lettere tilgjengelige enn tidligere. Verktøyene støtter numeriske, statistiske, grafiske, symbolske, geometriske og tekstlige funksjonaliteter. Disse kan brukes hver for seg eller sammen. Ved å bruke digitale verktøy kan elevene utforske flere aspekter ved numeriske, grafiske, geometriske og algebraiske sammenhenger. Denne tilnærmingen gjør at elevene kan fokusere på bruk, overføringsverdi og sammenhenger. Digitale verktøy kan gjøre tidligere vanskelig tilgjengelig matematikk lettere tilgjengelig, og gi læreren mulighet for å gjøre matematikken mer interessant for elevene.

For å kunne velge hensiktsmessige digitale verktøy, bruke verktøyene og vurdere resultatene de gir, er det avgjørende at elevene har grunnleggende matematiske ferdigheter og kunnskaper og behersker metoder.

Det forutsettes at elevene er kjent med og kan bruke både CAS og graftegner. Det blir opp til skoler/faglærere/elever/privatister å velge hensiktsmessige varianter av disse digitale verktøyene.

Vi forutsetter at alle som skal ta eksamen i MAT1013 Matematikk 1T, har tilgang til datamaskin med disse digitale verktøyene under Del 2 av eksamen, er kjent med bruken av verktøyene og har tilgang til skriver.

CAS (programvare på datamaskin)

CAS = Computer Algebra System er en typebetegnelse på kalkulatorer som beregner «symbolsk» i tillegg til «numerisk». Dette er altså avanserte, kraftige symbolbehandlende kalkulatorer, enten på plattformer eller som frittstående programvare. Eksamenskandidatene må kunne skrive ut eller levere løsninger fra CAS digitalt.

Graftegner (programvare på datamaskin)

Med en graftegner mener vi her en digital graftegner som kandidatene kan bruke til å tegne grafer digitalt og skrive ut grafene på papir. Det forutsettes at kandidatene er kjent med en slik graftegner ved alle sentralt gitte skriftlige eksamener i matematikk både i grunnskolen og i den videregående skolen. I Del 2 av eksamen vil det innenfor hovedområdet «Funksjoner» være aktuelt å gi oppgaver der kandidatene skal tegne en graf digitalt og deretter skrive ut grafen. Det kan også være aktuelt å finne skjæringspunkter mellom grafer, og mellom en graf og koordinataksene.

Formeleditor (programvare på datamaskin), særlig aktuell ved IKT-basert eksamen

Med dette digitale verktøyet kan kandidatene skrive og redigere matematiske formler, uttrykk, symboler og så videre. Dette kan være et nyttig verktøy, spesielt dersom Del 2 av eksamen skal gjennomføres som IKT-basert eksamen.

NB! Nødvendig programvare må være lastet ned og installert på datamaskinen før eksamen. Eksamenskandidatene skal ikke ha tilgang til Internett for å gjøre dette under eksamen.

5. Hva forventer vi at eksamenskandidatene behersker i de ulike digitale verktøyene i MAT1013 Matematikk 1T?

Oversikten nedenfor er ikke nødvendigvis uttømmende. Formålet her er å vise eksempler på hva som er viktig å mestre i de ulike digitale verktøyene for å være best mulig forberedt til eksamen. Det er først og fremst matematisk kompetanse som skal vurderes, ikke teknisk kunnskap.

CAS (Computer Algebra System)

- bruke CAS til å regne både numerisk og symbolsk
- løse likninger, ulikheter og likningssystemer
- forenkle / regne ut algebraiske uttrykk
- faktorisere algebraiske uttrykk
- derivere funksjoner
- finne binomialkoeffisienter
- regne ut binomiske sannsynligheter
- løse trigonometriske problemstillinger
- kopiere beregninger fra CAS til et tekstbehandlingsdokument og skrive ut
- skrive ut direkte fra CAS

Graftegner

- tegne grafer til
 - lineære funksjoner
 - omvendt proporsjonale funksjoner
 - polynomfunksjoner
 - rasjonale funksjoner
 - eksponentialfunksjoner
 - potensfunksjoner
- finne nullpunkter, bunnpunkter og topppunkter
- finne likningen for en linje gjennom to punkter
- finne skjæringspunkter mellom grafer og med koordinataksene
- løse likninger, likningssystemer og ulikheter grafisk
- finne x - og y -verdier i punkter på grafer
- finne stigningstall, momentan vekstfart og gjennomsnittlig vekstfart
- tegne tangenter / finne tangentlikning
- bruke lineær regresjon
- kopiere en grafisk framstilling til et tekstbehandlingsdokument og skrive ut
- skrive ut en grafisk framstilling direkte fra graftegneren

6. IKT- basert eksamen i matematikk (Del 2 av eksamen)

Skolene kan velge å gjennomføre Del 2 av eksamen i matematikk som «IKT-basert eksamen». Mens Del 1 skal besvares ved at kandidatene skriver for hånd på papir, og skolen sender besvarelsene per post til sensorene, skal en IKT-basert eksamen av Del 2 besvares ved hjelp av datamaskin. Løsningene skal samles i ett dokument som lastes opp i PGS-A og gjøres tilgjengelig for sensorene i PAS.

Dersom skolen velger IKT-basert eksamen, er det viktig å sette seg grundig inn i hvordan dette gjøres, og hvilke system- og formatkrav som gjelder. Informasjon om IKT-basert eksamen finner du her: <http://www.udir.no/Vurdering/Eksamen-videregaende/Gjennomfore-eksamen/>.

IKT-basert eksamen gjennomføres slik:

- 1) Kandidaten logger seg inn på Utdanningsdirektoratets prøvegjennomføringssystem (PGS) med tildelt brukernavn og passord når Del 2 av eksamen begynner.
- 2) Kandidaten laster ned eksamensoppgaven fra Utdanningsdirektoratets prøvegjennomføringssystem PGS-A.
- 3) Kandidaten besvarer eksamensoppgaven ved hjelp av datamaskin og digital programvare, og lagrer besvarelsen.
- 4) Kandidaten laster opp besvarelsen til PGS-A.
- 5) Sensorene henter besvarelsen i prøveadministrasjonssystemet PAS, der også karakterene blir satt ved fellessensuren.

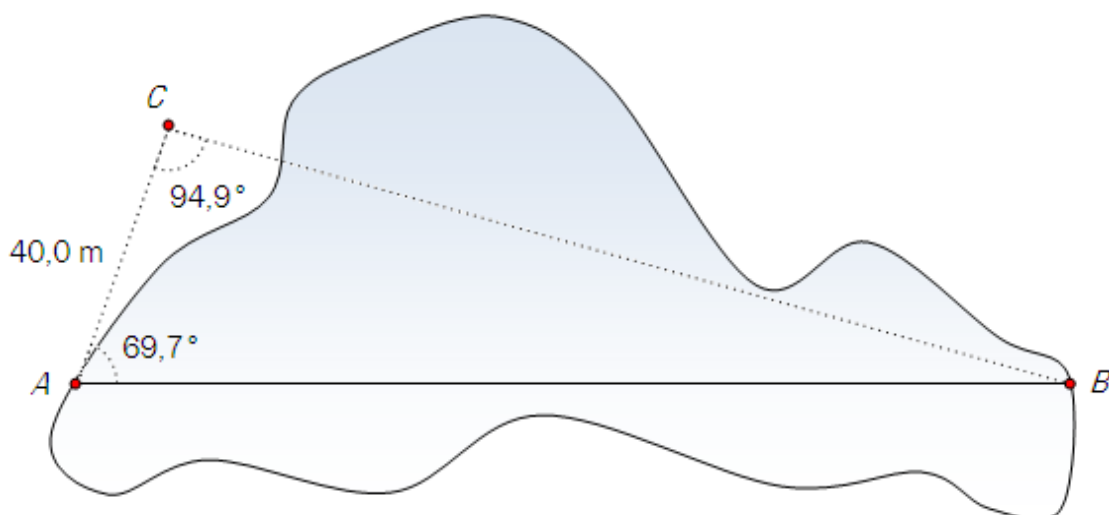
Se <http://www.udir.no/Vurdering/Eksamen-videregaende/Gjennomfore-eksamen/> for oppdaterte brukerveiledninger for skoler, elever/privatister og sensorer.

Her tar vi i tillegg med noen punkter som viser hvordan elever/privatister som skal besvare Del 2 som IKT-basert eksamen, bør gå fram, og hvilke krav som gjelder:

- Du må ha en **datamaskin** med de **digitale verktøyene** du trenger for å besvare eksamensoppgavene.
- Du må samle alle løsningene i ett dokument. Du bør ha et **tekstbehandlingsdokument** som basisdokument.
- Det er nyttig å ha, og kunne bruke, en **formeeditor** for å kunne skrive og redigere matematiske formler, uttrykk, symboler og så videre.
- Husk å lage en topp- eller bunntekst i basisdokumentet der du skriver skolens navn og kandidatnummeret ditt.
- Husk å nummerere oppgavene. Ta med utregninger og kommentarer. Kopier inn grafiske framstillinger, figurer og beregninger. Skriv utfyllende kommentarer til hver oppgave slik at du besvarer oppgaven best mulig. Nedenfor finner du eksempler på hvordan du kan gjøre dette:

Oppgave 3

CAS



Hilde står i punkt A og vil finne ut hvor langt det er til punkt B . Hun måler avstanden AC , $\angle A$ og $\angle C$. Se figuren ovenfor.

a) Bruk opplysningene på figuren, og bestem hvor langt det er fra A til B .

Løsningsforslag

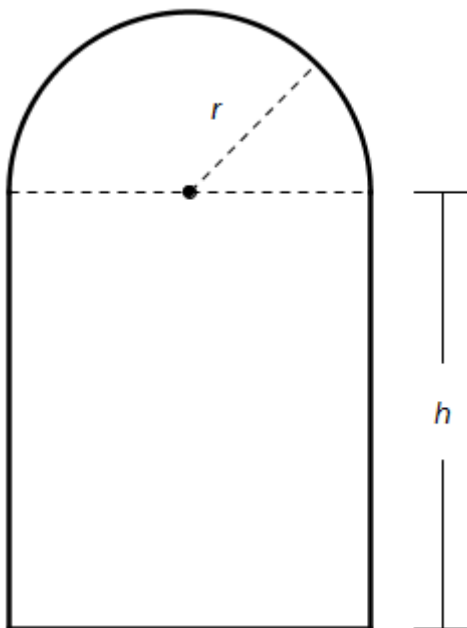
Jeg bruker sinussetningen og setter opp en likning som jeg løser i wxMaxima.

```
wx_compute_wrt(x/Sin(94.9)=40/Sin(180-94.9-69.7), x);  
x = 150.077
```

Det er ca. 150 m fra A til B .

Oppgave 4

CAS eller GRAFTEGNER



Vinduet ovenfor er satt sammen av et rektangel og en halvsirkel. Vinduet har omkrets 8,0 m.

Hva må radius r i halvsirkelen være for at arealet av vinduet skal bli størst mulig?
Bestem dette arealet.

Løsningsforslag

Omkretsen av vinduet er 8,0 m.

Jeg bruker dette for å finne en sammenheng mellom h og r .

$$2h + 2r + \pi r = 8,0$$

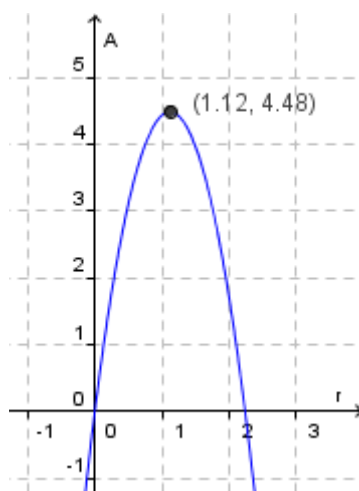
$$2h = 8,0 - \pi r - 2r$$

$$h = \frac{8,0 - \pi r - 2r}{2}$$

Arealet av vinduet kan da uttrykkes som

$$A(r) = 2r \cdot h + \frac{\pi r^2}{2} = 2r \cdot \frac{8,0 - \pi r - 2r}{2} + \frac{\pi r^2}{2}$$

Jeg tegner grafen til dette uttrykket i GeoGebra og finner toppunktet ved å bruke kommandoen «Ekstremalpunkt[]».



Radius i halvsirkelen må være ca. 1,1 m for at arealet av vinduet skal bli størst mulig.

Arealet blir da ca. 4,5 m².

(Se koordinatsystemet ovenfor.)

- Når du er ferdig, må du huske å lagre og laste opp besvarelsen din i PGS-A.
- Det finnes mange ulike typer digitale verktøy i matematikk, og mange ulike filformater. PGS godtar ikke alle filformater. Det kan være en fordel å bruke et tekstbehandlingsdokument som basisdokument og så kopiere fra andre digitale verktøy og inn i dette dokumentet, som vist ovenfor.
- Følgende filformater kan benyttes i forbindelse med IKT-basert eksamen: doc, pdf, rtf, xls, ods, odt, xlsx, docx, sxc, sxw, html, txt.
Det er lagt inn en kontroll i PGS-A som gjør at andre typer filformater blir avvist.
- Besvarelsen kan være på maksimalt 10 MB. Dersom filen er større, må den pakkes («zippes»). Følgende formater kan benyttes til slik pakking: tar, 7z, z, gz, rar, tar, zip

Ved IKT-basert eksamen i matematikk må HELE besvarelsen samles i én fil og leveres som IKT-basert eksamen. Eksamenskandidatene kan altså ikke levere Del 2 delvis på papir og delvis som IKT-basert eksamen, eller levere besvarelsen i flere filer.

7. Hvordan kan kandidatene dokumentere matematisk kompetanse ved hjelp av digitale verktøy?

Det er viktig at kandidatene dokumenterer og begrunner løsningsmetoder og svar også ved bruk av digitale verktøy. De siste årene har det skjedd en omfattende utvikling når det gjelder digitale matematiske verktøy for bruk i skolen, og det er derfor nødvendig å revurdere hva vi mener med å dokumentere og begrunne matematisk kompetanse ved bruk av slike verktøy.

Kravene til eksamenskandidatenes kunnskaper og ferdigheter er i det store og hele de samme som tidligere. Det er fortsatt kandidatenes evne til å forstå, analysere og dokumentere løsninger av matematiske problemer som skal vurderes. Men «veien» fram til løsningene har endret seg.

Verden, både i og utenfor skolen, har i større grad blitt digital. Dette må få konsekvenser også for matematikkfaget. Og – forhåpentlig vil konsekvensene være positive! For – kan det være riktig at det bare er regning på papir som er en intellektuell aktivitet, mens regning på en datamaskin ikke er annet enn tankeløs tastetrykking? Eller er det kanskje slik at vi ved å bruke datamaskin og programvare på en hensiktsmessig måte kan se og forstå matematiske sammenhenger bedre? Når vi «matematiserer», gjelder det først å stille de riktige spørsmålene. Videre formulerer vi matematiske problemer fra en virkelig verden (konseptualisering). Så utfører vi beregninger og bruker matematiske metoder. Til slutt overfører vi de matematiske formuleringene og resultatene tilbake til den virkelige verden for å verifisere matematikken. Kanskje må vi justere den matematiske modellen, eller lage en ny. I denne prosessen vil det ofte være hensiktsmessig å bruke digitale verktøy. Den sentralt gitte, skriftlige eksamen forsøker å ta hensyn til dette så langt det er mulig innenfor rammene som er gitt.

I dag er de digitale matematiske verktøyene kraftigere, bedre, mer brukervennlige og mer tilgjengelige enn tidligere. Verktøyene støtter numeriske, statistiske, grafiske, symbolske og geometriske funksjonaliteter. Disse kan brukes hver for seg eller sammen. Dermed kan vi utforske flere aspekter ved numeriske, grafiske, geometriske og algebraiske sammenhenger. Denne tilnærmingen gjør at elevene kan fokusere på bruk, overføringsverdi og sammenhenger. De digitale verktøyene kan gjøre tidligere vanskelig tilgjengelig matematikk lettere tilgjengelig, og gir læreren bedre muligheter for å gjøre matematikken interessant for elevene og bruke realistiske data og eksempler. Det er derfor en naturlig utvikling at eksamen i større grad forutsetter at digitale verktøy er kjent for eksamenskandidatene.

Beregningene, matematikkens «maskineri», er midler på veien til målet, men ikke et mål i seg selv. De siste årene har vi fått stadig kraftigere digitale verktøy som kan utføre selve beregningene for oss. Ved å bruke disse verktøyene kan flere få ta del i matematikken og se at matematikk er ~~noe~~ mer enn bare beregninger.

I Del 2 av eksamen er det viktig at kandidatene viser matematisk forståelse og kompetanse ved å analysere problemer, redegjøre for den løsningsmetoden som er brukt, og tolke, vurdere og presentere resultatene. Det finnes digitale verktøy som kan løse algebraiske problemer «trinn for trinn». Dette er en av flere grunner til å ikke kreve slike «trinn for trinn»-løsninger i Del 2 av eksamen. I forbindelse med vurderingen av eksamensbesvarelsen av Del 2 vil det være viktigere å gi uttelling for analysen, framgangsmåten og dokumentasjonen i problemløsningen enn for algebraiske «trinn for trinn»-løsninger. Algebraiske «trinn for trinn»-løsninger prøves i Del 1 av eksamen.

Oppgavene i Del 2 er formulert så presist som mulig, slik at selve problemet kommer klart fram. Disse oppgavene inneholder ikke lenger formuleringer som «Regn ut ...» eller «Bestem ved regning ...», men heller for eksempel «Tegn ...» eller «Bestem ...» sammen med et eventuelt krav til hvilket digitalt verktøy som skal benyttes. Dersom en oppgave i Del 2 er merket med «GRAFTEGNER», skal kandidatene løse oppgaven «grafisk». Dersom en oppgave er merket med «CAS», må kandidatene bruke CAS og løse oppgaven «algebraisk». Når en oppgave ikke er merket, må kandidatene selv avgjøre hvilken løsningsmetode og hvilket verktøy det er mest hensiktsmessig å bruke.

Ved bruk av digitale verktøy må den matematiske forståelsen dokumenteres. I en god besvarelse bør disse kravene være oppfylt:

1) Det matematiske problemet er tilstrekkelig analysert

Før selve problemløsningen bør kandidatene vurdere hvilke metoder det er hensiktsmessig å benytte. Resultatet av disse vurderingene kan være en løsningsmodell i form av en likning eller et likningssystem, en funksjon, et integral og så videre. Kandidatene bør deretter vurdere løsningsmetoden med hensyn til det forventede antall løsninger til likningen/likningssystemet, definisjonsmengde for funksjonen, valg av integrasjonsgrenser og så videre.

2) Bruk av løsningsmetodene framgår tydelig av besvarelsen

Kandidatene bør beskrive de enkelte trinnene i løsningsprosessen med ord eller skisser som understøtter beregningene. I besvarelsen bør kandidatene ta med utfyllende kommentarer slik at eventuelle regne- og inntastingsfeil ikke framstår som forståelsesfeil.

3) Resultatet er korrekt og formulert slik at sensor ikke er i tvil om hva som menes

Svaret på det matematiske problemet må ikke kunne leses eller tolkes feil, og kandidatene bør angi korrekt matematisk notasjon. I mange oppgaver er det naturlig å komme med en konklusjon som direkte svarer på spørsmålene i oppgaven. Det at resultatet skal være korrekt, er naturligvis en selvfølge. Mindre regnefeil bør ikke trekke mye ned, med mindre feilen fører til et usannsynlig resultat. Kandidatene bør derfor alltid vurdere de svarene og resultatene de får, og eventuelt kommentere disse ut fra forventet svar/resultat.

Når kandidatene skal tegne grafer i et koordinatsystem, forventes det at de som minimum tar med skala og navn på akser, og at de tegner grafen innenfor et fornuftig område eller i henhold til definisjonsmengden. Kandidatene kan fritt bruke kommandoer i programvaren for å analysere grafen, for eksempel finne skjæringspunkter eller topp- og bunnpunkter. Det er da viktig at kandidatene beskriver og kommenterer det de gjør.

Digitale verktøy har ofte sin egen notasjonsform. Det er naturligvis tillatt å bruke denne i problemløsningen dersom den matematiske tankegangen kommer klart fram. Men i konklusjonen bør kandidatene «oversette» notasjonen fra det digitale verktøyet og for eksempel skrive x^2 i stedet for $x^{\wedge}2$, $\sqrt{2}$ i stedet for $\text{sqrt}(2)$ og så videre. I sensuren bør sensor likevel være raus dersom kandidatene har brukt notasjonen fra de digitale verktøyene.

Nedenfor gir vi noen eksempler på hvilke krav til framgangsmåte og dokumentasjon av løsningene som stilles til eksamenskandidatene når de skal løse oppgaver i Del 2 av eksamen.

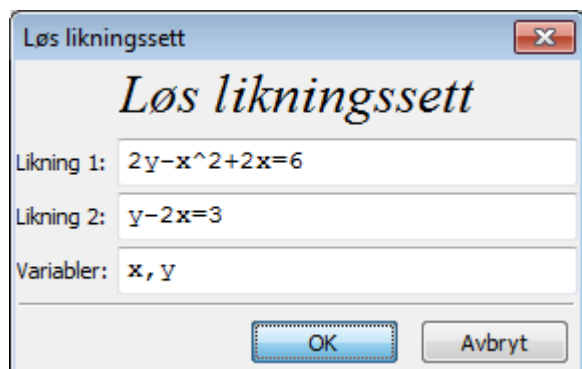
Løsningene nedenfor er eksempler på hvordan løsningene av oppgavene kan dokumenteres, og er ikke en entydig tolkning av begrepet «dokumentasjon».

Løsningsforslag til oppgaver i Del 2 av eksempeloppgaven

Løsningsforslag, Oppgave 1

Digitale verktøy: wxMaxima
GeoGebra

a) Jeg løser likningssystemet i wxMaxima.

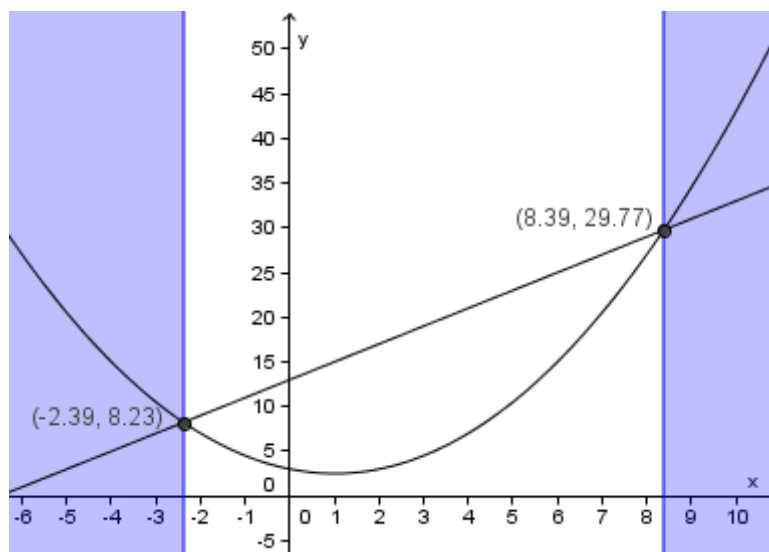


```
solve([2y-x^2+2x=6, y-2x=3], [x,y]);  
[[x=6, y=15], [x=0, y=3]]
```

Løsning:

$$\underline{\underline{x=6 \wedge y=15 \quad \vee \quad x=0 \wedge y=3}}$$

b) Jeg løser ulikheten grafisk i GeoGebra.



Jeg tegner først grafene til de to uttrykkene $\frac{1}{2}x^2 - x + 3$ og $2x + 13$

Så finner jeg skjæringspunktene mellom grafene ved å bruke kommandoen «Skjæring mellom to objekt».

For å markere løsningsmengden skriver jeg ulikheten direkte inn i inntastingsfeltet i GeoGebra.

Løsning:

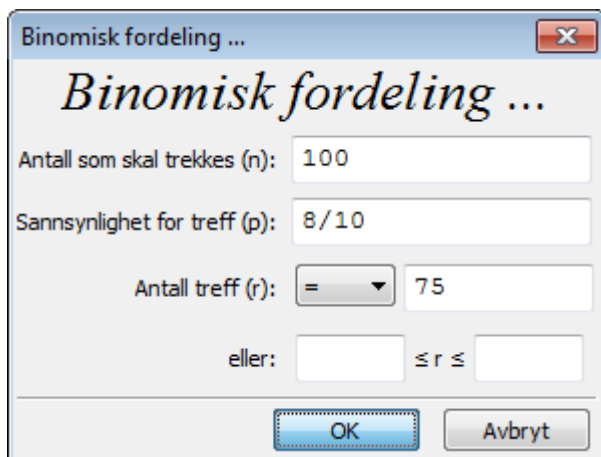
$$\underline{\underline{x \in \langle \leftarrow, -2,4 \rangle \cup [8,4, \rightarrow \rangle}}$$

Løsningsforslag, Oppgave 2

Digitale verktøy: wxMaxima

Dette er en binomisk sannsynlighetsfordeling.
Jeg regner i wxMaxima.

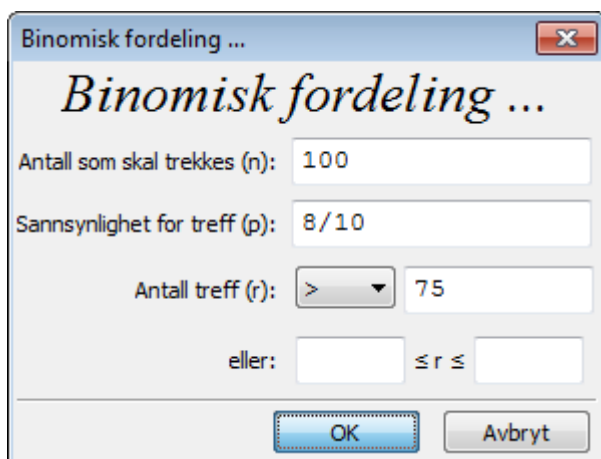
a)



```
X: bin_dist(100, 8/10)$  
P(X=75);  
  
0.04388
```

Sannsynligheten for at akkurat 75 er fornøyd med produktet, er ca. 4,39 %.

b)



```
X: bin_dist(100, 8/10)$  
P(X>75);  
  
0.8686
```

Sannsynligheten for at flere enn 75 er fornøyd med produktet, er ca. 86,9 %.

Løsningsforslag, Oppgave 3

Digitale verktøy: wxMaxima

- a) Jeg bruker sinussetningen og setter opp en likning som jeg løser i wxMaxima.

```
wx_compute_wrt(x/Sin(94.9)=40/Sin(180-94.9-69.7), x);  
x = 150.077
```

Det er ca. 150 m fra A til B.

- b) Jeg bruker først cosinussetningen for å finne vinkelen mellom sidene som er 20 m og 24 m. Jeg setter opp en likning som jeg løser i wxMaxima.

```
wx_compute_wrt(14^2=20^2+24^2-2*20*24*Cos(x), x);  
x = 360.0 n + 324.341, x = 360.0 n + 35.6591
```

Dette er en vinkel i en trekant. Vinkelen er mindre enn 180° .
Vinkelen er da $35,7^\circ$

Jeg regner så ut arealet ved å bruke arealsetningen.

```
1/2*20*24*Sin(35.7);  
140.05
```

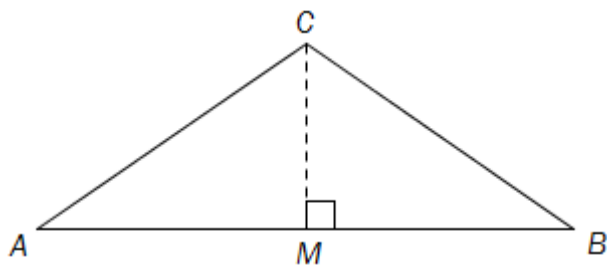
Arealet er ca. 140 m².

- c) Jeg finner først høyden fra C på AB. Jeg setter opp en likning som jeg løser i wxMaxima.

```
wx_compute_wrt(8*h/2=11.2, h);  
h = 2.8
```

Høyden fra C på AB er 2,8

Siden trekanten er likebeint, vil denne høyden treffe midtpunktet på AB. Jeg kaller dette midtpunktet for M.



Jeg bruker så Pytagoras' setning på $\triangle AMC$ for å finne lengden av AC .

```
sqrt(4.0^2+2.8^2);
```

```
4.88262
```

$$AC \approx \underline{\underline{4,9}}$$

Til slutt bruker jeg arealsetningen for å finne $\angle A$. Jeg setter opp en likning som jeg løser i *wxMaxima*.

```
wx_compute_wrt(1/2*8.0*4.88*Sin(A)=11.2, A);
```

```
A=360.0 n+144.986, A=360.0 n+35.0136
```

Denne vinkelen er en vinkel i en trekant og er derfor mindre enn 180° .

$$\angle A \approx \underline{\underline{35^\circ}}$$

Løsningsforslag, Oppgave 4

Digitale verktøy: wxMaxima
GeoGebra

Omkretsen av vinduet er 8,0 m.

Jeg bruker dette for å finne en sammenheng mellom h og r .

$$2h + 2r + \pi r = 8,0$$

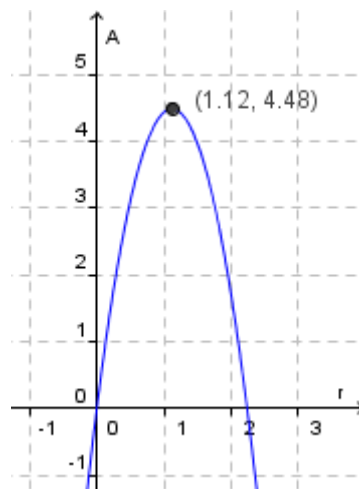
$$2h = 8,0 - \pi r - 2r$$

$$h = \frac{8,0 - \pi r - 2r}{2}$$

Arealet av vinduet kan da uttrykkes som

$$A(r) = 2r \cdot h + \frac{\pi r^2}{2} = 2r \cdot \frac{8,0 - \pi r - 2r}{2} + \frac{\pi r^2}{2}$$

Jeg tegner grafen til dette uttrykket i GeoGebra og finner toppunktet ved å bruke kommandoen «Ekstremalpunkt[]».



Radius i halvsirkelen må være ca. 1,1 m for at arealet av vinduet skal bli størst mulig.

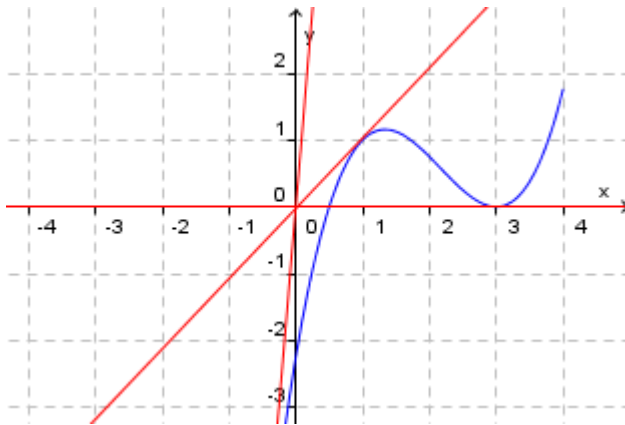
Arealet blir da ca. 4,5 m².

(Se koordinatsystemet ovenfor.)

Løsningsforslag, Oppgave 5

Digitale verktøy: GeoGebra
wxMaxima

- a) Jeg tegner grafen i GeoGebra og skisserer tangentene.



- b) Jeg bruker ettpunktsformelen og får likningen

$$y - y_1 = a(x - x_1)$$
$$f(x) - f(x_1) = f'(x)(x - x_1)$$

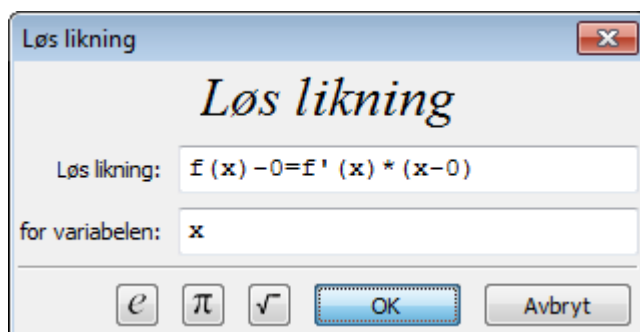
Jeg definerer funksjonen f i wxMaxima.

Jeg setter så opp likningen.

Tangenten skal gå gjennom origo. Jeg setter derfor $x_1 = f(x_1) = 0$

```
f(x) := 0.5x^3 - 3.25x^2 + 6x - 2.25;
```

```
f(x) := 0.5 x^3 - 3.25 x^2 + 6 x - 2.25
```



```
wx_compute_wrt(f(x) - 0 = f'(x) * (x - 0), x);
```

```
x = -3/4, x = 1, x = 3
```

```
f(-3/4);
```

-8.78906

$f(1);$

1.0

$f(3);$

0.0

Grafen til f har en tangent som går gjennom origo i punktene

$(-0,75, -8,8)$

$(1,1)$

$(3,0)$

8. Eksempler på andre typer oppgaver etter ny modell

Del 1

Oppgave 1

Løs likningene

a) $2^{2x-1} = 64$

b) $3^{-2+x} - 1 = 2$

c) $4^{x^2+x} - 1 = 15$

Oppgave 2

Løs likningen

$$\lg(x-2) = 2$$

Oppgave 3

Bestem den eksakte verdien for $\sin 45^\circ$

Oppgave 4

Egypteren Ahmes (ca. 1700 f.Kr.) brukte denne regelen for å regne ut arealet av en sirkel:

Kvadrer produktet av diameteren og $\frac{8}{9}$, og du får arealet av sirkelen.

Vis at Ahmes brukte verdien $\frac{256}{81}$ for π

Oppgave 5

Funksjonen f er gitt ved

$$f(x) = x^2 + 2x$$

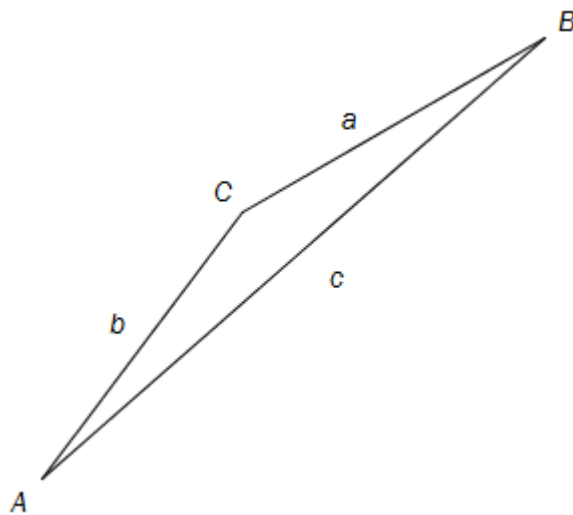
Bruk definisjonen av den deriverte til å vise at $f'(x) = 2x + 2$

Oppgave 6

Gitt $\triangle ABC$ der

- $b = 5$
- $c = 10$
- $\sin A = 0,2$

Bestem arealet av trekanten.



Oppgave 7



Kilde: Utdanningsdirektoratet

De 20 elevene i klasse 1A planlegger sommerferien.

- 16 elever har fått sommerjobb.
- 10 av elevene som har fått sommerjobb, skal også på ferie.
- 2 elever har ikke fått sommerjobb og skal heller ikke på ferie.

- a) Systematiser opplysningene i teksten ovenfor i en krysstabell eller i et venndiagram.
- b) Bestem sannsynligheten for at en tilfeldig valgt elev fra klasse 1A skal på ferie.

Oppgave 8

En funksjon f er gitt ved

$$f(x) = x^2, \quad x \in [0, 3]$$

Bestem likningen for tangenten til grafen til f i punktet $(2, f(2))$.

Lag en skisse av grafen til f sammen med tangenten.

Oppgave 9

Bestem c slik at likningen $x^2 + 5x + c = 0$ bare har én løsning.

Oppgave 10

To typer minnepenner har ulik lagringskapasitet.

Én minnepenn av type 1 og tre av type 2 har til sammen en lagringskapasitet på 100 GB.

To minnepenner av type 1 og fire av type 2 har til sammen en lagringskapasitet på 144 GB.

Bestem lagringskapasiteten til én minnepenn av type 1 og lagringskapasiteten til én minnepenn av type 2.

Oppgave 11

Ifølge værmeldingen er det

- 50 % sannsynlighet for at det regner på lørdag
- 30 % sannsynlighet for at det regner på søndag

Lag et valgtre, og bestem sannsynligheten for at det regner i løpet av helga.

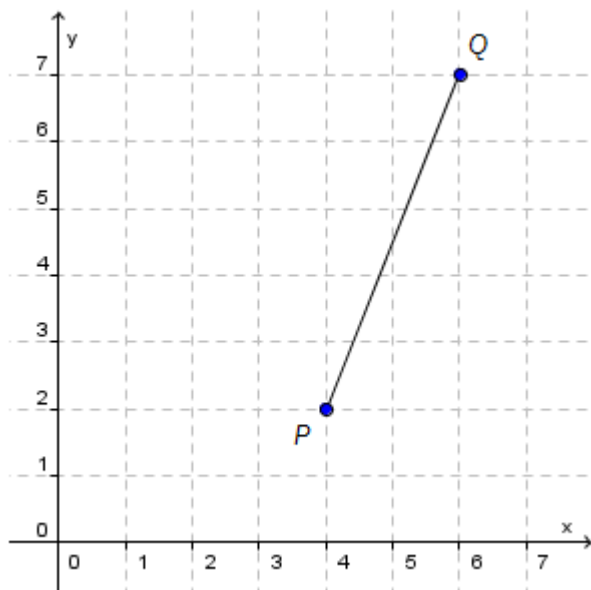
Oppgave 12

En funksjon f er gitt ved

$$f(x) = 4x^3 - 12x^2 + 3, \quad x \in [-2, 3]$$

Bestem eventuelle ekstremalpunkter til f .

Oppgave 13



En rett linje l går gjennom punktene $A(1, -2)$ og $B(3, 4)$.

Gjør beregninger, og avgjør om linjen l er parallell med linjestykket PQ i koordinatsystemet ovenfor.

Oppgave 14

Skriv så enkelt som mulig

a) $\frac{\sqrt{50}}{5}$

b) $(\sqrt{24} - \sqrt{6})^2$

Oppgave 15

Andregradslikningen gitt ved $t^2 + 5t + 6 = 0$ har to løsninger t_1 og t_2 .

a) Vis at $t_1 \cdot t_2 = 6$ og $t_1 + t_2 = -5$

Andregradslikningen gitt ved $x^2 + bx + c = 0$ har to løsninger x_1 og x_2 .

b) Vis at $x_1 \cdot x_2 = c$ og $x_1 + x_2 = -b$

Oppgave 16

Bestem c og d slik at uttrykkene blir fullstendige kvadrater

a) $x^2 + 4x + c$

b) $4y^2 - 24y + d$

Oppgave 17

Skriv så enkelt som mulig

a) $\sqrt{27} - \sqrt{12} + \sqrt{75} - \sqrt{18} \cdot \sqrt{6}$

b) $(\sqrt{2} - \sqrt{3}) \cdot (\sqrt{2} + \sqrt{3})$

Oppgave 18

En trekant har sidene 5 m, 12 m og 13 m.

Er dette en rettvinklet trekant?

Oppgave 19

I en twistpose er det 25 twistbiter. Per liker 16 av disse. Vi trekker tilfeldig to twistbiter fra posen.

- Bestem sannsynligheten for at Per liker begge twistbitene vi trekker.
- Bestem sannsynligheten for at Per bare liker én av twistbitene vi trekker.



Kilde: Utdanningsdirektoratet

Oppgave 20

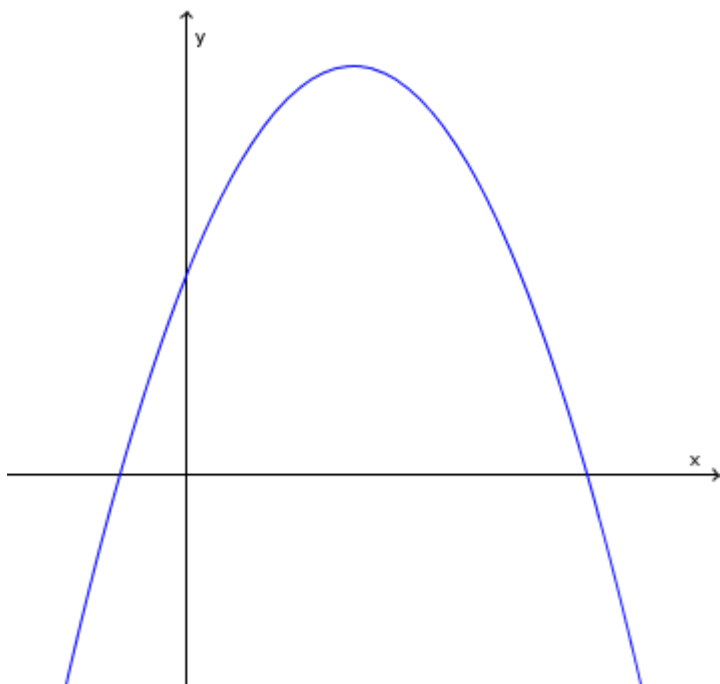
Den deriverte til en funksjon f er gitt ved

$$f'(x) = a(x+1)(x-2), \quad a < 0$$

Lag en fortegnslinje for $f'(x)$ og bruk fortegnslinjen til å bestemme

- monotoniegenskapene til f
- eventuelle topp- og bunnpunkter på grafen til f

Oppgave 21



Ovenfor ser du grafen til en funksjon f gitt ved $f(x) = ax^2 + bx + c$

Bestem fortegnet til a , b , c og diskriminanten $b^2 - 4ac$

Oppgave 22

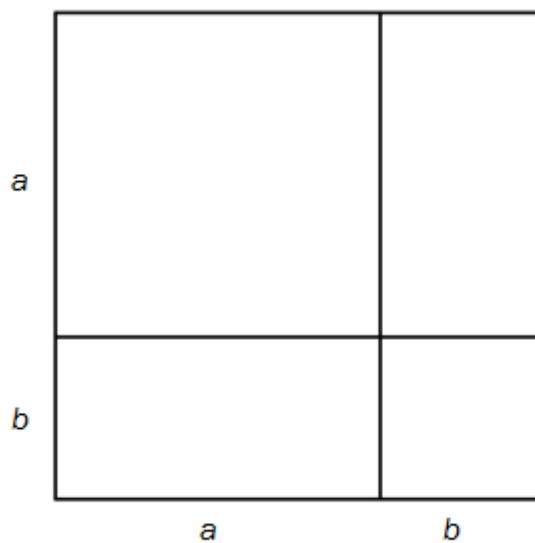
Bruk konjugatsetningen (tredje kvadratsetning) til å bestemme $97 \cdot 103$

Oppgave 23

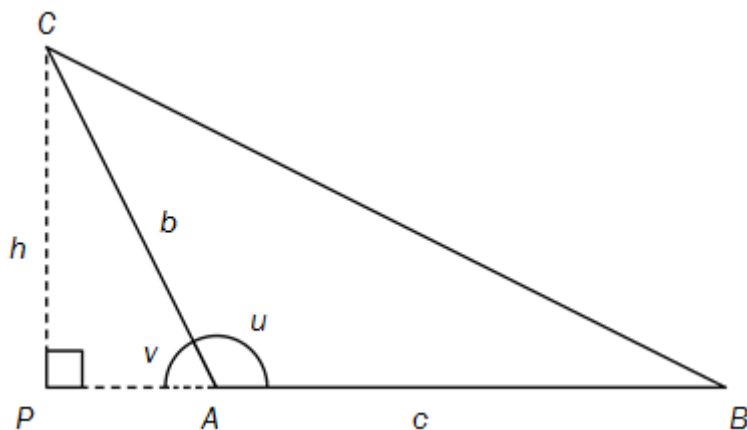
Bruk potensregneregler til å avgjøre hvilket tall som er størst av 2^{75} og 3^{50}

Oppgave 24

Bruk figuren nedenfor til å utlede første kvadratsetning.



Oppgave 25



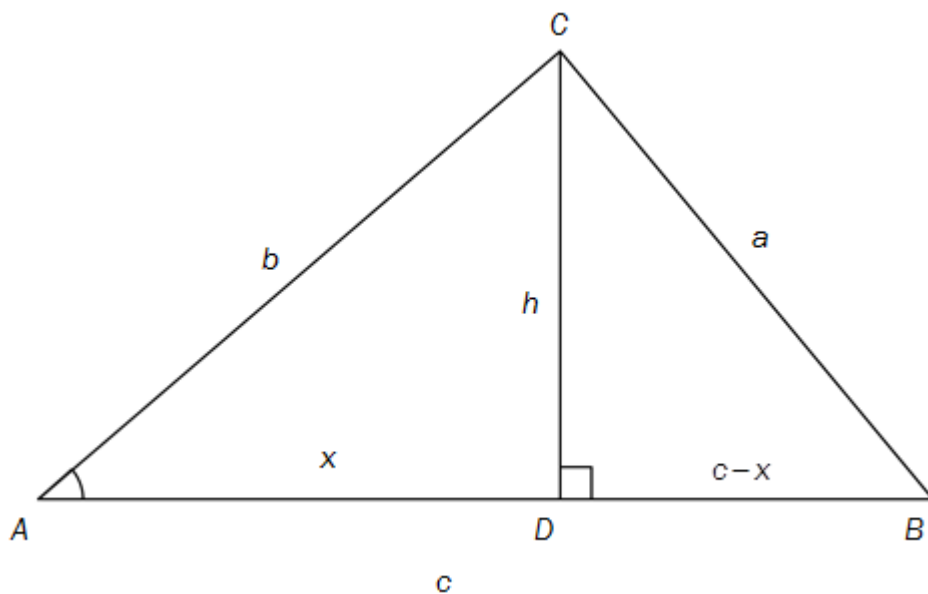
Bruk figuren ovenfor til å vise at arealsetningen

$$\text{Areal}_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} bc \cdot \sin u$$

også gjelder når $\angle u > 90^\circ$

Oppgave 26

Bruk figuren nedenfor til å vise at $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos A$

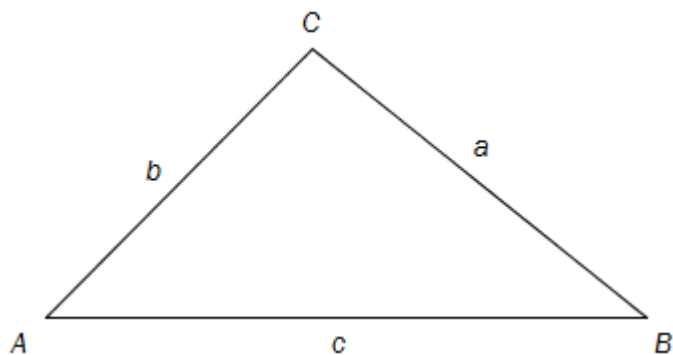


Oppgave 27

$$\text{Areal}_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} bc \cdot \sin A$$

$$\text{Areal}_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} ac \cdot \sin B$$

$$\text{Areal}_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} ab \cdot \sin C$$



Bruk dette til å utlede sinussetningen.

Del 2

Oppgave 1

GRAFTEGNER

Funksjonene A og B er modeller som viser hvordan folketallet i to små bygder endret seg i perioden fra 2003 til 2011.

$$A(x) = 0,54x^3 + 6,32x^2 + 33,8x + 1410, \quad x \in [0, 8]$$

$$B(x) = -0,20x^3 - 5,32x^2 + 18,8x + 1693, \quad x \in [0, 8]$$

Her er x antall år etter 2003, og $A(x)$ og $B(x)$ viser folketallet i bygd A og i bygd B.

- a) Når var folketallet likt i de to bygdene?
- b) Når passerte folketallet i de to bygdene til sammen 3 500?

Oppgave 2

GRAFTEGNER

Funksjonen O gitt ved

$$O(x) = -0,2x^2 + 190x - 30000, \quad x \in [0, 900]$$

er en modell som viser overskuddet $O(x)$ kroner når en bedrift produserer og selger x enheter av en vare.

- a) Tegn grafen til funksjonen O .
- b) Hvor mange enheter må bedriften produsere og selge for at overskuddet skal bli størst mulig? Hvor stort er overskuddet da?
- c) Hvor mange enheter må bedriften produsere og selge for å ikke gå med underskudd?

Oppgave 3

GRAFTEGNER

En bedrift produserer snøbrett. Funksjonen G gitt ved

$$G(x) = \frac{2200}{x} + 400, \quad x > 0$$

viser gjennomsnittskostnaden $G(x)$ kroner per snøbrett ved produksjon av x snøbrett.

- a) Tegn grafen til G .
- b) Bestem hvor mange snøbrett bedriften må produsere for at gjennomsnittskostnaden per snøbrett skal bli 500 kroner.
- c) Hva nærmer gjennomsnittskostnaden per snøbrett seg dersom produksjonen av snøbrett blir svært stor?

Oppgave 4

GRAFTEGNER

Temperaturen i et klasserom senkes etter skoletid.

Funksjonen T gitt ved

$$T(x) = 27 \cdot 0,97^x - 5, \quad x \geq 0$$

viser temperaturen $T(x)$ grader celsius ($^{\circ}\text{C}$) i et klasserom x timer etter at varmesystemet slås av. Varmesystemet slås av klokken 16.00.

- a) Tegn grafen til T .
- b) Bestem temperaturen i klasserommet når varmesystemet slås av.

Når varmesystemet slås på, stiger temperaturen med ca. 8°C per time.

- c) Bestem omtrent når strømmen må slås på igjen dersom temperaturen skal være 20°C klokken 08.00 neste morgen.

Oppgave 5

GRAFTEGNER

Mange forskere hevder at et resultat av den globale oppvarmingen er at isbreer smelter. Tolv år etter at isen forsvinner, vil små planter (som kalles lav) begynne å vokse fram på fjell. Hvert lav vokser utover omtrent i sirkelform.

Funksjonen d gitt ved

$$d(t) = 7,0 \cdot \sqrt{t - 12}, \quad t \geq 12$$

viser diameteren $d(t)$ millimeter til et lav t år etter at isen har forsvunnet.

- a) Tegn grafen til d .
- b) Bestem diameteren til lavet 18 år etter at isen har forsvunnet.
- c) En forsker målte diameteren til et lav til 28 mm på et sted. Bestem når isen forsvant på dette stedet.

Oppgave 6

GRAFTEGNER

En dyreart blir satt ut i et begrenset område. Funksjonen D gitt ved

$$D(x) = \frac{2008 \cdot (x^2 + 2,6)}{2x^2 + 29,4}, \quad x \geq 0$$

viser hvor mange dyr $D(x)$ av denne arten det er i området x år etter at dyrearten ble satt ut.

- a) Bestem $D'(2)$. Hva forteller dette svaret?
- b) Når er den deriverte størst? Hva forteller dette svaret?

Oppgave 7

CAS



Kilde: http://ai.fas.ufl.edu/services_available.htm
(08.12.2011)

Antall bakterier i en bakteriekultur kan beskrives ved funksjonen B gitt ved

$$B(t) = 2987 + 144t + 2,85t^2$$

der $B(t)$ er antall bakterier etter t døgn.

- a) Bestem $B'(3)$ og $B'(6)$. Hva forteller disse svarene om bakteriekulturen?
- b) Bestem når tilveksten av bakterier er 50 per time.

Oppgave 8

CAS eller GRAFTEGNER

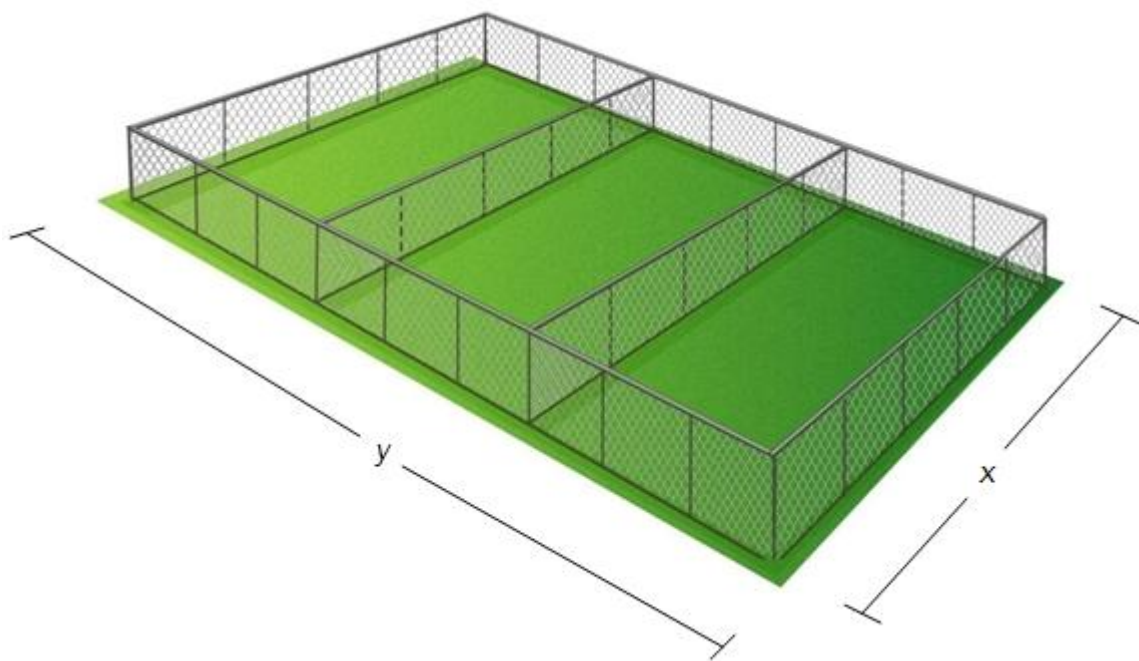
Du skal lage et rektangel med omkrets 400 m.

Bestem lengden og bredden av rektangelet slik at arealet blir størst mulig.

Oppgave 9

CAS eller GRAFTEGNER

En bonde har 500 m gjerde. Han skal lage et rektangulært område som han skal dele i tre like store deler. Vi setter bredden i rektangelet lik x og lengden lik y . Se figuren nedenfor.



Kilde: Utdanningsdirektoratet

- a) Vis at arealet som er begrenset av gjerdet, kan skrives som

$$A(x) = 250x - 2x^2$$

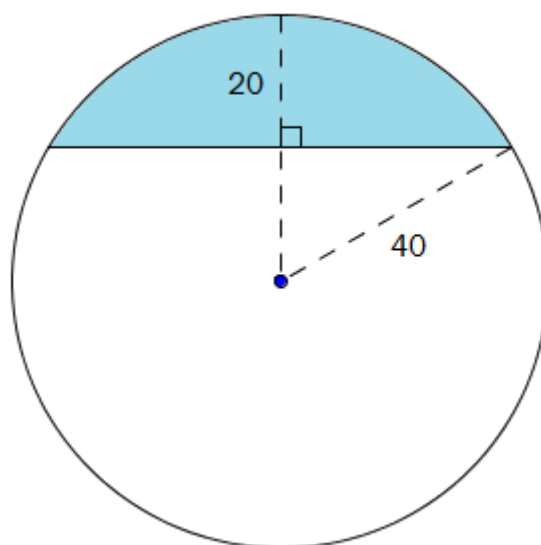
- b) Hvilken bredde gir størst mulig areal?

Oppgave 10

CAS

Sirkelen nedenfor har radius 40.

Bestem det eksakte arealet av det blå området.



Oppgave 11

En undersøkelse fra Norges Optikerforbund viser at i aldersgruppen 15–29 år er det

- 14,3 % som bare bruker briller
- 7,2 % som bare bruker kontaktlinser
- 9,7 % som bruker både kontaktlinser og briller



Kilde: Utdanningsdirektoratet

- a) Lag et venndiagram eller en krysstabell for å illustrere opplysningene i teksten ovenfor.
- b) En tilfeldig valgt person i gruppen bruker briller.
Bestem sannsynligheten for at denne personen også bruker kontaktlinser.

Oppgave 12

CAS

En funksjon f er gitt ved

$$f(x) = \frac{2}{x(x-1)} - \frac{3x}{x} + \frac{1}{x^2 - x}$$

Skriv funksjonsuttrykket så enkelt som mulig, og bestem eventuelle vertikale og horisontale asymptoter for grafen til f .

Oppgave 13

CAS

Andregradsfunksjonen f er gitt ved

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

- Funksjonen har bare ett nullpunkt.
- Grafen til f skjærer y -aksen når $y = 18$
- $f(6) = 18$

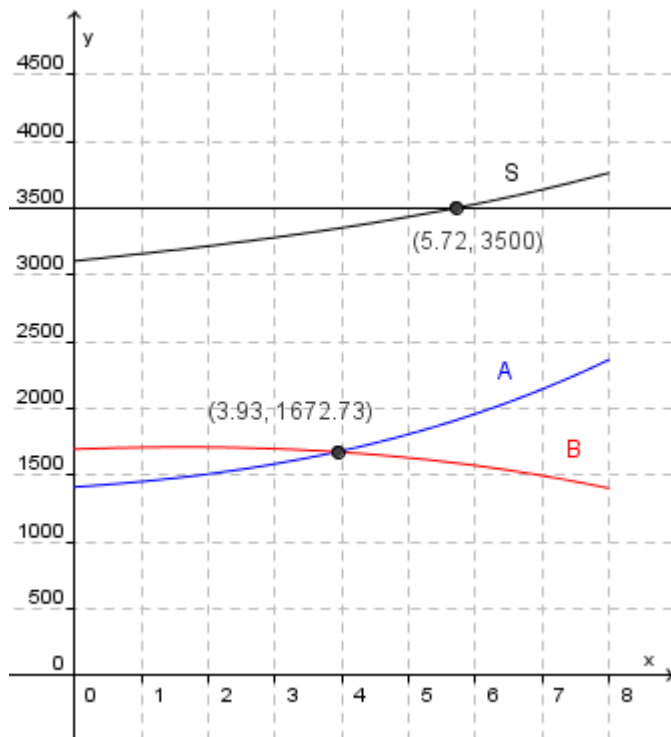
Bruk opplysningene ovenfor til å finne a , b og c .

Løsningsforslag. Ekstraoppgaver, Del 2

Løsningsforslag, Oppgave 1

Digitale verktøy: GeoGebra

Jeg tegner grafene til A og B i GeoGebra, sammen med grafen til funksjonen S gitt ved $S(x) = A(x) + B(x)$ og den rette linjen $y = 3500$.

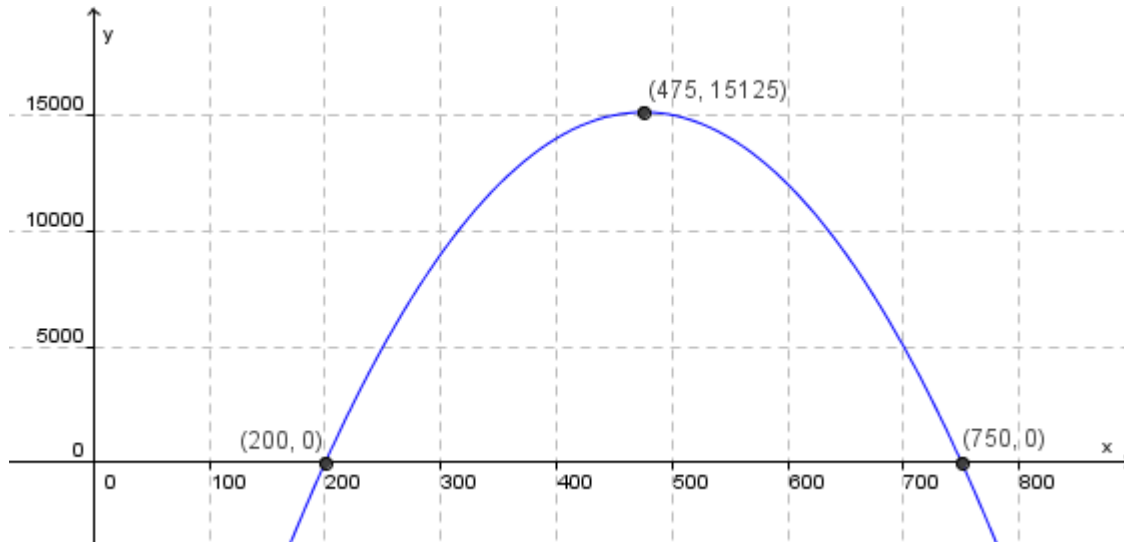


- a) Jeg finner skjæringspunktet mellom grafen til A og grafen til B ved å bruke kommandoen «Skjæring mellom to objekt».
Folketallet var likt etter ca. 3,9 år, dvs. i slutten av 2006.
(Se koordinatsystemet ovenfor.)
- b) Jeg finner skjæringspunktet mellom grafen til S og linjen $y = 3500$ ved å bruke kommandoen «Skjæring mellom to objekt».
Folketallet passerte til sammen 3 500 etter 5,7 år, dvs. i siste del av 2008.
(Se koordinatsystemet ovenfor.)

Løsningsforslag, Oppgave 2

Digitale verktøy: GeoGebra

- a) Jeg tegner grafen til O i GeoGebra.



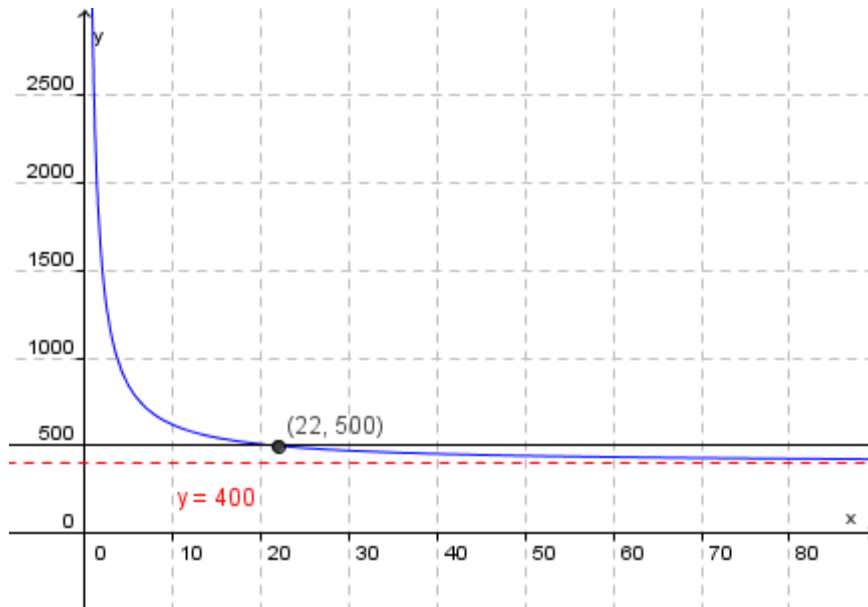
- b) Jeg finner toppunktet ved å bruke kommandoen Ekstremalpunkt[O].
Bedriften må produsere og selge 475 enheter for at overskuddet skal bli størst mulig.
Overskuddet er da på 15 125 kroner.
(Se koordinatsystemet i a.)

- c) Jeg finner nullpunktene til funksjonen ved å bruke kommandoen «Nullpunkt[O]».
- Antall enheter må være i intervallet $[200, 750]$ for at bedriften ikke skal gå med underskudd.
(Se koordinatsystemet i a.)

Løsningsforslag, Oppgave 3

Digitale verktøy: GeoGebra

- a) Jeg tegner grafen til G i GeoGebra.

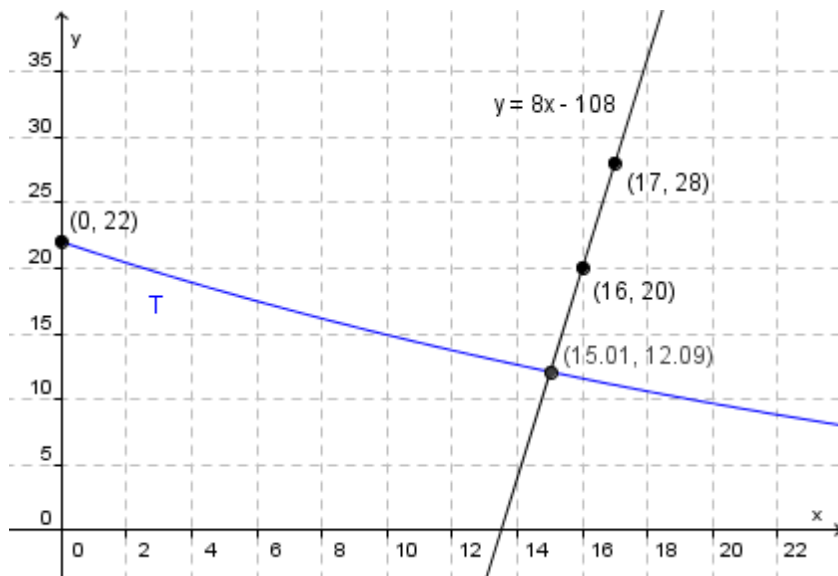


- b) Jeg tegner den rette linjen $y = 500$ i samme koordinatsystem som grafen til G , og finner skjæringspunktet mellom grafen og linjen ved å bruke kommandoen «Skjæring mellom to objekt».
Bedriften må produsere 22 snøbrett for at gjennomsnittskostnaden per brett skal bli 500 kroner.
(Se koordinatsystemet i a.)
- c) Jeg finner den horisontale asymptoten til G ved å bruke kommandoen «Asymptote[G]».
Gjennomsnittskostnaden nærmer seg 400 kroner per brett.
(Se koordinatsystemet i a.)

Løsningsforslag, Oppgave 4

Digitale verktøy: GeoGebra

- a) Jeg tegner grafen til T i GeoGebra.



- b) Jeg finner skjæringspunktet mellom grafen til T og y -aksen ved å bruke kommandoen «Skjæring mellom to objekt».

Temperaturen i klasserommet er 22°C når varmesystemet slås av.

(Se koordinatsystemet i a.)

- c) En rett linje som går gjennom punktet $(16, 20)$ og har stigningstall 8, må også gå gjennom punktet $(16 + 1, 20 + 8) = (17, 28)$.

Jeg tegner linjen gjennom disse to punktene i GeoGebra og finner at den har likningen $y = 8x - 108$.

Denne linjen skjærer grafen til T i punktet $(15,01, 12,09)$.

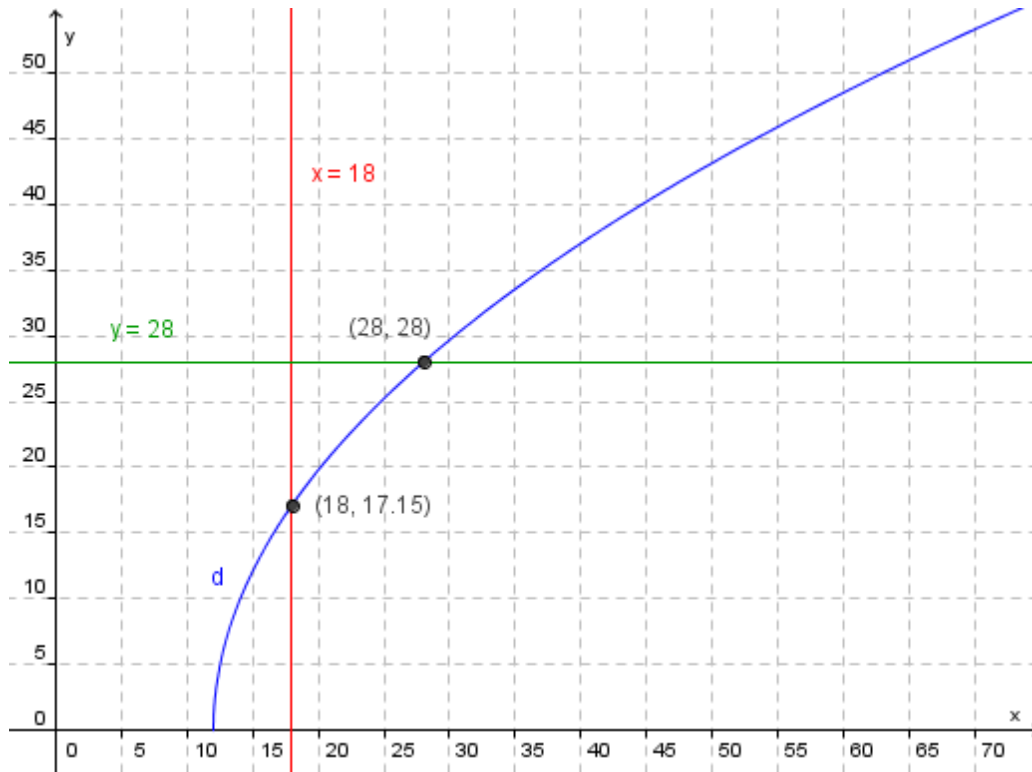
Strømmen må slås på etter 15 timer, dvs. klokken sju.

(Se koordinatsystemet i a.)

Løsningsforslag, Oppgave 5

Digitale verktøy: GeoGebra

- a) Jeg tegner grafen til d i GeoGebra.

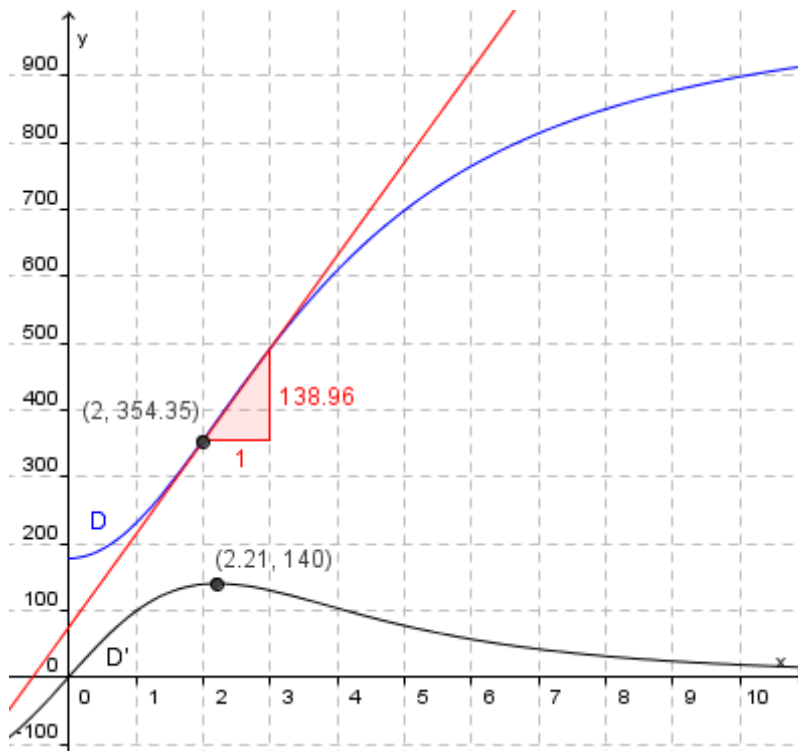


- b) Jeg tegner den rette linjen $x = 18$ i samme koordinatsystem som grafen til d og finner skjæringspunktet mellom denne linjen og grafen ved å bruke kommandoen «Skjæring mellom to objekt».
18 år etter at isen har forsvunnet, er diameteren ca. 17 mm.
(Se koordinatsystemet i a).)
- c) Jeg tegner den rette linjen $y = 28$ i samme koordinatsystem som grafen til d og finner skjæringspunktet mellom denne linjen og grafen ved å bruke kommandoen «Skjæring mellom to objekt».
Det er ca. 28 år siden isen forsvant på dette stedet.
(Se koordinatsystemet i a).)

Løsningsforslag, Oppgave 6

Digitale verktøy: GeoGebra

a)



Jeg tegner grafen til D i GeoGebra.

Jeg bruker kommandoen «Tangent[2,D]» og tegner tangenten til grafen i punktet der $x = 2$. Jeg finner så stigningstallet til denne tangenten ved å bruke kommandoen «Stigning». Stigningstallet til tangenten er ca. 139.

$$D'(2) \approx \underline{\underline{139}}$$

Svaret forteller at etter to år øker antall dyr med 139 per år.

b) Jeg tegner grafen til den deriverte og finner toppunktet ved å bruke kommandoen «Ekstremalpunkt[D']».

Den deriverte er størst når $x \approx \underline{\underline{2,2}}$

Antall dyr av denne arten øker raskest etter 2,2 år.

Løsningsforslag, Oppgave 7

Digitale verktøy: wxMaxima

- a) Jeg definerer funksjonen i wxMaxima og regner ut den deriverte i de to punktene.

```
B(t) := 2987 + 144t + 2.85t^2;
```

```
B(t) := 2987 + 144 t + 2.85 t^2
```

```
B'(3);
```

```
161.1
```

```
B'(6);
```

```
178.2
```

$$B'(3) \approx \underline{\underline{161}}$$

$$B'(6) \approx \underline{\underline{178}}$$

Etter 3 timer er tilveksten av bakterier 161 per time.

Etter 6 timer er tilveksten av bakterier 178 per time.

- b) $50 \cdot 24 = \underline{\underline{1200}}$

Når bakterietilveksten er 50 per time, er den 1 200 per døgn.

Jeg bruker wxMaxima til å løse likningen $B'(t) = 1200$

```
B'(t) = 1200;
```

```
5.7 t + 144 = 1200
```

```
t = 185.263
```

Tilveksten av bakterier er 1 200 per døgn etter ca. 185 døgn.

Løsningsforslag, Oppgave 8

Digitale verktøy: GeoGebra

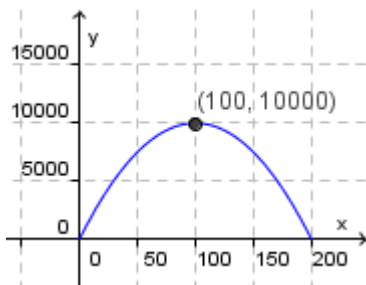
Jeg setter lengden av rektangelet lik x og bredden lik y .
Siden omkretsen er 400, er $2x + 2y = 400$

$$2y = 400 - 2x$$

$$y = \underline{200 - x}$$

$$\text{Arealet } A(x) = x \cdot (200 - x) = \underline{-x^2 + 200x}, \quad x \in \langle 0, 200 \rangle$$

Jeg tegner grafen til A i GeoGebra for $x \in \langle 0, 200 \rangle$ og bruker kommandoen «Ekstremalpunkt[A]» for å finne toppunktet.



Arealet er størst når lengden $x = \underline{\underline{100}}$
og bredden $y = 200 - x = 200 - 100 = \underline{\underline{100}}$

Løsningsforslag, Oppgave 9

Digitale verktøy: *wxMaxima*

a) $4x + 2y = 500$

$$2y = 500 - 4x$$

$$y = \underline{250 - 2x}$$

$$A(x) = x \cdot y = x \cdot (250 - 2x) = \underline{250x - 2x^2}$$

b) $A(x)$ er et andregradsuttrykk med negativt andregradsledd.

Grafen til A er da en parabel med toppunkt.

Jeg finner x - verdien i dette toppunktet ved å løse likningen $A'(x) = 0$

Jeg definerer funksjonen i *wxMaxima*, og løser denne likningen.

$$A(x) := 250x - 2x^2;$$

$$A(x) := 250x - 2x^2$$

$$A'(x) = 0;$$

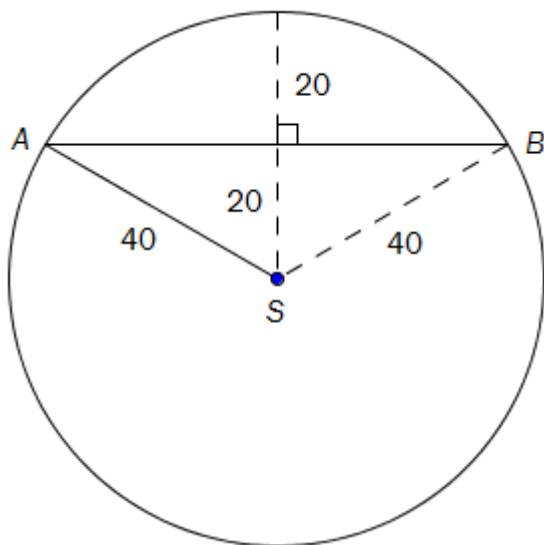
$$250 - 4x = 0$$

$$x = 62.5$$

Rektangelet må da være 62,5 m bredt.

Løsningsforslag, Oppgave 10

Digitale verktøy: wxMaxima



I en rettvinklet trekant der hypotenusen er dobbelt så lang som den korteste kateten, er vinklene 30° , 60° og 90° .

Vi får da en sirkelsektor på $2 \cdot 60^\circ = \underline{120^\circ}$

Arealet av denne sirkelsektoren er

$$\frac{\pi \cdot 40^2 \cdot 120}{360};$$
$$\frac{1600 \pi}{3}$$

Arealet av det blå området er lik arealet av denne sirkelsektoren minus arealet av $\triangle ASB$

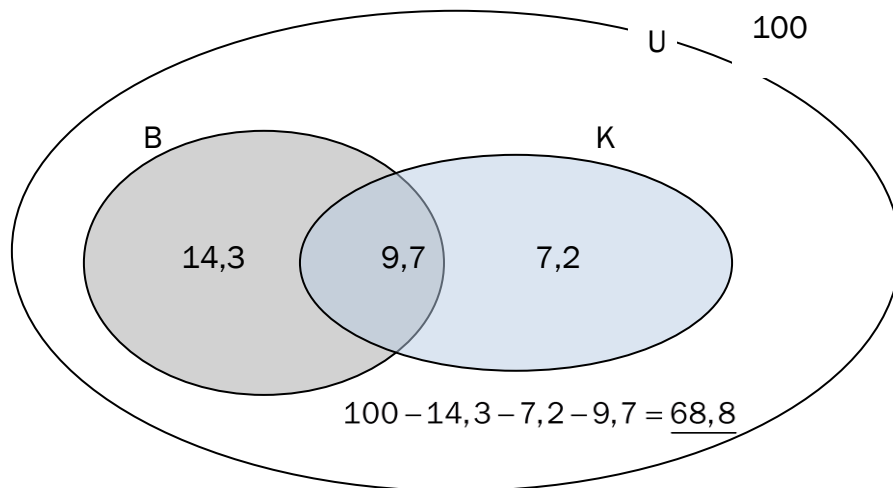
$$\frac{\pi \cdot 40^2 \cdot 120}{360} - 2 \cdot \frac{\sqrt{40^2 - 20^2} \cdot 20}{2};$$
$$\frac{1600 \pi}{3} - 400\sqrt{3}$$

$$\text{Arealet er } \underline{\underline{\frac{1600\pi}{3} - 400\sqrt{3}}}$$

Løsningsforslag, Oppgave 11

Digitale verktøy: wxMaxima

a)



	Kontaktlinser	Ikke kontaktlinser	Totalt
Briller	9,7	14,3	24
Ikke briller	7,2	68,8	76
Totalt	16,9	83,1	100

b) $9.7/24;$

0.4042

Sannsynligheten for at denne personen også bruker kontaktlinser, er ca. 40 %.

Løsningsforslag, Oppgave 12

Digitale verktøy: wxMaxima

Jeg definerer funksjonen i wxMaxima.

```
f(x) := 2/(x*(x-1)) - 3x/x + 1/(x^2-x);
```

$$f(x) := \frac{2}{x(x-1)} - \frac{3x}{x} + \frac{1}{x^2-x}$$

Jeg bruker så kommandoen «Faktoriser» for å skrive uttrykket enklere.

```
wx_factor(f(x) := 2/(x*(x-1)) - 3x/x + 1/(x^2-x));
```

$$f(x) := -\frac{3(x^2-x-1)}{(x-1)x}$$

Grafen til f har vertikale asymptoter for de verdiene av x som gjør nevneren lik null.

Jeg ser av det faktoriserte uttrykket at grafen har vertikale asymptoter:

$$\underline{\underline{x=0}}$$

$$\underline{\underline{x=1}}$$

For å finne eventuelle horisontale asymptoter finner jeg $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ og $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$



```
limit(f(x), x, inf);
```

- 3



```
limit(f(x), x, minf);
```

-3

Horisontal asymptote: $y = -3$

Løsningsforslag, Oppgave 13

Digitale verktøy: wxMaxima

Siden grafen til f skjærer y-aksen når $y = 18$, er $c = \underline{18}$

Siden grafen bare har ett nullpunkt, er diskriminanten lik null, og jeg får likningen

$$b^2 - 4a \cdot 18 = 0$$

Siden grafen går gjennom punktet $(6, 18)$, får jeg også likningen

$$a \cdot 6^2 + b \cdot 6 + 18 = 18$$

```
solve([b^2-4*a*18=0, a*6^2+b*6+18=18], [a,b]);
```

```
[ [ a = 2 , b = -12 ] , [ a = 0 , b = 0 ] ]
```

Siden f er en andregradsfunksjon, ser jeg bort fra løsningen $a = 0 \wedge b = 0$

$$a = \underline{2}$$

$$b = \underline{-12}$$

$$c = \underline{18}$$